Н. Г. Миндюк
И. С. Шлыкова

Методические рекомендации

Алгебра

КЛАСС 9

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Н. Г. Миндюк
И. С. Шлыкова

АЛГЕБРА

Методические рекомендации

9 КЛАСС

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21
М61

16+

Миндюк Н. Г.
М61 Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Н. Г. Миндюк, И. С. Шлыкова. — М. : Просвещение, 2017. — 239 с. : ил. — ISBN 978-5-09-042971-9.

Эта книга предназначена для учителей, ведущих преподавание по учебнику «Алгебра, 9» авторов Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой под редакцией С. А. Теляковского. В ней дана характеристика курса алгебры 9 класса, приведены методические рекомендации по всем темам и указания к упражнениям учебника и рабочей тетради. В пособии содержится примерное планирование учебного материала, а также тексты контрольных работ и тест для итогового зачёта.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-042971-9

Предисловие

Содержание и методические особенности учебника алгебры для 9 класса под редакцией С. А. Теляковского

Данное методическое пособие предназначено для учителей, ведущих преподавание по учебнику «Алгебра, 9» Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой под редакцией С. А. Теляковского. Представленный в новом издании учебника курс отвечает требованиям Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования и ориентирован на реализацию целей интеллектуального и общекультурного развития учащихся.

В учебник включён разнообразный по содержанию материал. Здесь расширяются известные учащимся сведения об уравнениях и неравенствах. Дополняются общие сведения о функциях, рассматриваются свойства квадратичной и степенной функций. Учащиеся знакомятся с понятием числовой последовательности и свойствами числовых последовательностей особого вида — арифметической и геометрической прогрессий. Рассматриваются элементы комбинаторики, вводятся начальные сведения из теории вероятностей. Таким образом, в учебнике представлен материал из различных фундаментальных разделов курса математики: арифметика, алгебра, функции, комбинаторика, теория вероятностей. Материал каждого из этих разделов раскрывается последовательно, составляя соответствующую содержательно-методическую линию. В учебнике реализуется принцип сбалансированного развития указанных линий курса, их взаимосвязи и взаимодействия. Тем самым создаются благоприятные условия для усвоения учащимися теории и овладения математическим аппаратом.

Представленный в учебнике «Алгебра, 9» курс ориентирован на достижение учащимися трёх групп образовательных результатов обучения: личностных, метапредметных и предметных.

Принятый в учебнике подход к изложению теории и построению системы упражнений создаёт благоприятные условия для определения каждым учащимся индивидуальной траектории изучения курса, ориентированной на достижение личностных результатов обучения.

Усвоению слабыми учащимися новых знаний и умений способствуют выбранные авторами подходы к изложению теории, подробно разобранные авторские примеры, постепенное нарастание трудности заданий, сквозная линия упражнений для повторения, включённых в каждый пункт учебника. Существенную помощь слабым учащимся оказывает помещённый в учебнике раздел «Сведения из курса алгебры 7—8 классов». В то же время в поле зрения авторов учебника постоянно находятся учащиеся, проявляющие интерес и склонности к математике. В число основных и дополнительных упражнений к пунктам и главам включаются усложнённые задания. Каждая глава учебника завершается дополнительным пунктом под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше», содержащим теоретические сведения и соответствующие достаточно сложные задания. Кроме того, в учебник включён специальный раздел «Задачи повышенной трудности». Всё это стимулирует учащихся, интересующихся математикой, к мобилизации своих сил для достижения достаточно высокого уровня овладения материалом.

Личностному развитию учащихся способствуют также представленный в учебнике раздел «Исторические сведения», включённые в некоторые пункты ссылки на материал исторического характера, а также помещённые в учебнике сведения из жизни великих математиков. Ознакомление с этими материалами способствует формированию общекультурной компетентности учащихся.

Реализованный в учебнике подход к изложению теоретического материала и построению системы упражнений позволяет учащимся сделать новые шаги в достижении метапредметных результатов обучения.

Предисловие учебника и преамбулы к главам раскрывают цели изучения курса и практическую значимость формируемых знаний и умений. В ходе изучения теории и выполнения различных упражнений учащиеся овладевают умением переходить от описания некоторой ситуации к уравнению или к системе уравнений, от формулы, задающей функцию, к её графику, от описания некоторого события к вычислению вероятности этого события и т. п.

В учебник включены различные упражнения с проблемной постановкой вопроса. В ходе выполнения подобных упражнений вырабатываются умения учащихся аргументировать свой ответ, проводить доказательные рассуждения. Важную роль в формировании соответствующих умений играют включённые в учебник задачи-исследования и задания для работы в парах. В ходе их выполнения учащиеся овладевают умением сотрудничать с одноклассниками, прислушиваться к их мнению, формулировать и отстаивать свою точку зрения. Всё это способствует формированию коммуникативной компетентности учащихся.

Изучение курса, представленного в учебнике «Алгебра, 9», способствует достижению учащимися предметных результатов обучения.

В процессе изучения курса учащиеся делают новые шаги в овладении умениями применять математическую терминологию и символику, проводить доказательства математических утверждений. Существенно расширяется имеющийся у них запас сведений об уравнениях и неравенствах. Продолжается формирование умения учащихся применять новые знания при решении текстовых задач, в частности задач с практическим содержанием, с сюжетами, взятыми из смежных дисциплин. Учащиеся получают представления об особенностях выводов и прогнозов, носящих вероятностный характер. Они овладевают умением решать несложные задачи на нахождение частоты и вероятности случайных событий.

Представленная в учебнике «Алгебра, 9» система построения курса создаёт благоприятные условия для его усвоения учащимися и их дальнейших шагов в овладении математическими знаниями и умениями.

К данному курсу существует Электронная форма учебника (ЭФУ) — соответствующая по структуре, содержанию и художественному оформлению печатной форме учебника и включающая в себя интерактивные ссылки, расширяющие и дополняющие материал печатного учебника.

Функциональными особенностями ЭФУ является:

— удобный и понятный интерфейс и навигация по ЭФУ;

— работа в онлайн- и офлайн-режимах;

— тестовые задания к каждой теме, разделу учебника;

— возможность добавления материалов, созданных учителем;

— инструменты изменения размера шрифта, создания заметок и закладок.

Использование ЭФУ предоставляет учителю следующие возможности:

— организовать контроль и самоконтроль по результатам изучения темы;

— реализовать технологии мобильного, дистанционного или смешанного обучения;

— реализовать требования ФГОС по формированию информационно-образовательной среды системой электронных образовательных ресурсов и др.

Учебные пособия, дополняющие учебник «Алгебра, 9» под редакцией С. А. Теляковского

1. Миндюк Н. Г. Алгебра. Рабочая тетрадь. 9 класс. В 2 ч. / Н. Г. Миндюк, И. С. Шлыкова. — М.: Просвещение, 2013—2015.

В рабочую тетрадь входит 30 работ, составленных ко всем пунктам учебника, за исключением дополнительных пунктов под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше». Каждая работа состоит из двух разделов. В разделе I содержатся несложные задания, способствующие усвоению вводимых понятий и алгоритмов, установлению связей нового материала с ранее изученным. В раздел II включены более сложные задания, решение многих из которых требует свободного владения сформированными знаниями и умениями, проявления интеллектуальной гибкости.

Включённые в рабочую тетрадь упражнения разнообразны по форме предъявления задания. Учащимся предлагается закончить начатое решение, установить некоторое соответствие, проиллюстрировав его с помощью стрелок, выбрать верный ответ, обведя кружочком соответствующий номер, и т. п. Наличие подготовленных таблиц, вычерченной системы координат, некоторых пояснений к составлению уравнений или систем уравнений создаёт предпосылки для интенсификации учебного процесса.

2. Макарычев Ю. Н. Алгебра. Дидактические материалы. 9 класс / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, Л. Б. Крайнева. — М.: Просвещение, 2013—2015.

Дидактические материалы предназначены для организации самостоятельной работы учащихся и контроля за их знаниями и умениями. Включённые в них работы делятся на следующие группы: самостоятельные работы, контрольные работы, итоговое повторение по темам, задания для школьных олимпиад.

Самостоятельные работы состоят из двух блоков заданий. В первый блок включены тренировочные задания, способствующие достижению учащимися уровня обязательной подготовки. Второй блок состоит из более сложных заданий, выполнение которых способствует формированию продвинутых технических навыков, умения свободно оперировать приобретёнными знаниями, проявлять определённую сообразительность. Хорошо успевающим учащимся можно порекомендовать выполнять упражнения из второго блока заданий, минуя упражнения первого блока или части из них.

Контрольные работы состоят из заданий обязательного уровня, отмеченных особым знаком, и более сложных заданий.

3. Жохов В. И. Уроки алгебры в 9 классе: пособие для учителей общеобразовательных организаций / В. И. Жохов, Л. Б. Крайнева. — М.: Просвещение, 2015.

Книга помогает учителю в подготовке к урокам алгебры. В ней даются рекомендации по организации уроков. Для каждого урока предложены соответствующие устные упражнения, проведён отбор теоретических сведений, тренировочных упражнений и упражнений для повторения. Выдвинуты предложения по подведению итогов урока.

В пособии представлены два варианта примерного тематического планирования, рассчитанного на различное число часов, выделяемых в неделю на изучение алгебры.

В пособии приводятся тексты контрольных работ, составленных в двух вариантах.

Содержание и структура пособия «Алгебра. Методические рекомендации. 9 класс»

В данном методическом пособии даются рекомендации для учителей, представленные в виде отдельных глав, которые делятся на параграфы. Названия глав и параграфов дублируют соответствующие названия в учебнике. В каждом параграфе указано число часов, отводимых на изучение входящих в него пунктов (для второго варианта примерного планирования это число записано в скобках). Обозначено место соответствующих контрольных работ.

В параграфах выделяются следующие рубрики: «Содержание материала», «Основная цель», «Характеристика основных видов деятельности учащихся», «Методический комментарий». Этот материал позволяет учителю правильно расставить акценты при организации учебного процесса. В пособие включены рубрики «Указания к основным упражнениям учебника», а также «Указания к дополнительным упражнениям учебника» и «Указания к упражнениям из рабочей тетради». Этот материал может оказаться полезным для учителя при подготовке к урокам. В пособии также разбираются подходы к изложению теоретического материала, представленного в пунктах под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше», и приёмы выполнения включённых в эти пункты упражнений.

В пособие включены тексты текущих контрольных работ и итоговой контрольной работы, а также тест для итогового зачёта.

Завершает пособие «Примерное планирование учебного материала», в котором указано время, отводимое на изучение каждого параграфа, и место контрольных работ по курсу алгебры 9 класса.

ГЛАВА I

Квадратичная функция

§ 1. Функции и их свойства

Номер пункта	Название пункта	Число уроков[1]
1	Функция. Область определения и область значений функции	2 (3)
2	Свойства функций	3 (4)

Содержание материала

В курсе алгебры 7 и 8 классов учащиеся получили определённый запас сведений о функциях. Они познакомились с понятиями «аргумент» и «функция», «область определения функции», «график функции», получили представление о свойствах и графиках некоторых функций — линейной функции и прямой пропорциональности как её частного вида, обратной пропорциональности, функций, задаваемых формулами $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$. В данном параграфе сведения о функциях обобщаются и расширяются. Понятие «область определения функции» дополняется новым понятием — «область значений функции». Учащиеся получают представление о таких понятиях, как «нули функции», «промежутки знакопостоянства». Разъясняется смысл терминов «возрастание (убывание) функции в некотором промежутке», «возрастающая функция», «убывающая функция». На примере функций $y = kx + b$, где $k \neq 0$, и $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, показано применение новых понятий при анализе свойств функций.

Основная цель

Основная цель изучения материала данного параграфа состоит в том, чтобы систематизировать и обобщить сведения о функциях, известные учащимся из курсов алгебры 7 и 8 классов, и дополнить эти сведения новыми понятиями, играющими важную роль как в курсе алгебры 9 класса, так и в курсе математического анализа, изучаемом в старших классах.

---

[1] Здесь и далее в скобках указывается число уроков, выделяемых при втором варианте планирования.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

В ходе изучения данного параграфа учащиеся выполняют различные задания, в которых по формуле, задающей функцию, предлагается найти значение функции, соответствующее указанному значению аргумента, или решить обратную задачу — определить, при каких значениях аргумента функция принимает заданное значение. Формируется умение учащихся с помощью формулы $y = f(x)$, задающей некоторую функцию, находить в несложной ситуации область определения и область значений функции, а также нули функции и промежутки знакопостоянства. Учащиеся выполняют различные задания, связанные с построением и чтением графиков функций, в частности графиков, описывающих реальные процессы.

Методический комментарий

Изучение параграфа «Функции и их свойства» начинается с пункта «Функция. Область определения и область значений функции», в котором расширяются сведения о функциях, полученные учащимися в курсе алгебры 7 и 8 классов. Напоминается определение понятия «функция». Учащиеся делают важный шаг в овладении функциональной символикой. Они узнают, что в случае, когда зависимость переменной y от переменной x является функцией, используется запись $y = f(x)$. Следует подчеркнуть, что символом $f(x)$ обозначают значение функции, соответствующее значению аргумента, равному x.

Необходимо напомнить учащимся известное им понятие области определения функции. Важно обратить их внимание на то, что если функция задана формулой $y = f(x)$ и не сделано специальных оговорок, то считают, что область определения этой функции состоит из всех значений переменной x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл. В систему упражнений включены различные задания на нахождение области определения функции, заданной формулой. Специальное внимание следует уделить упражнению **14**, предназначенному для работы в парах. Выполнение этого упражнения должно завершаться коллективным обсуждением в классе ответов, полученных при работе пар.

В учебнике систематизируются известные учащимся сведения о графиках функций, предлагаются различные задания на построение и чтение графиков функций. В системе упражнений рекомендуется специально остановиться на заданиях **16** и **26**, где представлены графики функций, описывающих реальные процессы.

Завершают пункт 1 упражнения **27** и **28**, в которых учащиеся встречаются с примерами функций, описывающих реальные процессы с помощью нескольких формул. В упражнении **27** представлена задача-исследование, способствующая формированию коммуникативной компетенции учащихся. Важно обратить их внимание на то, что при задании функции несколькими формулами необходимо следить, чтобы множества значений аргумента, указанные для разных формул, не содержали общих элементов. Иначе нарушается основное требование, связанное с определением понятия функции, согласно которому каждому значению аргумента должно соответствовать единственное значение функции.

В пункте 2 «Свойства функций» расширяется запас общих сведений о функциях, которыми владеют учащиеся. Вводятся новые понятия: «нули функции», «промежутки знакопостоянства». Впервые учащиеся знакомятся с понятием функции, возрастающей (убывающей) в некотором промежутке. Они узнают, что функция, возрастающая на всей области определения, называется возрастающей функцией, а функция, убывающая на всей области определения, называется убывающей функцией. Новые сведения о функциях, приведённые в данном параграфе, являются опорными при рассмотрении свойств функций $y = kx + b$, где $k \neq 0$, и $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$. Полезно предложить учащимся подобным образом проанализировать свойства функций $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

В системе упражнений, включённых в пункт 2, активно используются приобретённые учащимися новые знания о свойствах функций. Первую группу составляют упражнения **32—37**, связанные с чтением графиков функций. В заданиях **32—34** представлены графики функций, описывающих некоторые реальные процессы. Важно, чтобы учащиеся овладели умением извлекать из подобных графиков информацию о характере протекания того или иного процесса. Подобные упражнения убеждают учащихся в значимости приобретаемых знаний и умений. Специальное внимание следует уделить упражнению **35**, предназначенному для работы в парах. После его выполнения члены пары должны объяснить друг другу использованный способ рассуждений, исправить допущенные ошибки, если они обнаружатся. Такая форма работы позволяет учащимся овладеть новыми понятиями и успешно использовать их при выполнении упражнений **36—38**. Последующие упражнения **39—51** способствуют усвоению учащимися понятий области определения функции, нулей функции, промежутков знакопостоянства, а также формированию умений строить и читать графики функций.

Из дополнительных упражнений к параграфу 1 рекомендуется, при наличии времени, использовать задание **204** с практическим содержанием, а также задания **211—213**, связанные с построением и чтением графиков функций в усложнённой ситуации.

Указания к основным упражнениям учебника

12. Обозначим длину эскалатора через s м: $AB = s$, $BC = h$. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 1) $AB = 2BC$, следовательно, $s = 2h$.

Скорость движения эскалатора выражается формулой $v = \frac{s}{t}$.

Так как $v = 0{,}75$ м/с, то $\frac{2h}{t} = \frac{3}{4}$. Отсюда $h = \frac{3t}{8}$.

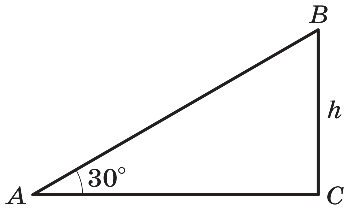

Рис. 1

а) Если $t = 2{,}25$ мин, т. е. $t = 135$ с, то $h = \frac{3 \cdot 135}{8} \approx \mathbf{51}$ (м);

б) если $h = 60$ м, то $t = \frac{8h}{3} = \frac{8 \cdot 60}{3} = \mathbf{160}$ (с).

14. (*Для работы в парах.*) Перед выполнением упражнения рекомендуется повторить с учащимися определения модуля числа и арифметического квадратного корня.

а) $y = \frac{5}{|x+1|+4}$; $|x+1| + 4 \geqslant 4$ при любом значении x. Таким образом, область определения функции: $(-\infty;\ +\infty)$;

б) $y = \frac{48}{|x|-2}$; $|x| - 2 \neq 0$; $|x| \neq 2$; $x \neq -2$ и $x \neq 2$. Следовательно, область определения функции: $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$;

в) $y = x^2 + \sqrt{|x|-1}$; $|x| - 1 \geqslant 0$; $|x| \geqslant 1$. Таким образом, область определения функции: $(-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$;

г) $y = \sqrt{|2-x|-3x}$; $|2 - x| \geqslant 3x$.

Рассмотрим два случая:

1) $x \leqslant 2$, тогда $|2 - x| = 2 - x$. Имеем $2 - x \geqslant 3x$; $x \leqslant 0{,}5$;

2) $x > 2$, тогда $|2 - x| = x - 2$. Имеем $x - 2 \geqslant 3x$; $x \leqslant -1$, что противоречит условию $x > 2$.

Таким образом, область определения функции: $(-\infty;\ 0{,}5]$.

21. Обозначим периметр треугольника через P см:

$P = 20 + 2x$, где x см — длина боковой стороны.

Так как каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, то $20 < 2x$, т. е. $x > 10$.

Известно, что $P \leqslant 100$. Имеем $20 + 2x \leqslant 100$; $x \leqslant 40$.

Таким образом, область определения функции: $(10; 40]$, а область значений функции: $(40; 100]$.

27. (*Задача-исследование.*) Найдём некоторые значения функции в каждом из заданных промежутков.

Значение $p(20)$ находим по первой формуле, так как $20 < 40$:

$$p(20) = 2 \cdot 20 + 20 = 60.$$

Значения $p(40)$, $p(50)$ и $p(60)$ находим по второй формуле:

$$p(40) = p(50) = p(60) = 100.$$

А значение $p(90)$ находим по третьей формуле, так как $90 > 60$:

$$p(90) = -\frac{2}{3} \cdot 90 + 140 = 80.$$

В первом промежутке времени температура воды повышалась, во втором промежутке — оставалась постоянной, а в третьем — понижалась.

Физический смысл рассматриваемого процесса таков: в промежутке $[0; 40)$ вода нагревалась, в промежутке $[40; 60]$ вода кипела, а в промежутке $(60; 150]$ она остывала.

35. (*Для работы в парах.*) а) Нулями функции являются значения x, равные -5, -3, 1 и 4;

б) положительные значения функция принимает в промежутках $[-7; -5)$,$(-3; 1)$ и $(4; 5]$, а отрицательные значения — в промежутках $(-5; -3)$ и $(1; 4)$;

в) функция возрастает в промежутках $(-4; -1)$ и $(2; 5)$ и убывает в промежутках $(-7; -4)$ и $(-1; 2)$;

г) наибольшее значение, равное 6, функция принимает при $x = -7$; наименьшее значение, равное -4, функция принимает при $x = 2$.

42. а) Формула, задающая функцию, имеет смысл при $x \geqslant -6$ и $x \neq -5$. Следовательно, область определения функции: $[-6; -5) \cup (-5; +\infty)$.

Для нахождения нулей функции приравняем к нулю числитель дроби, задающей функцию, и решим полученное уравнение:

$$x - \sqrt{x+6} = 0;\ \sqrt{x+6} = x;\ x^2 - x - 6 = 0;\ x_1 = -2;\ x_2 = 3.$$

Значение $x = -2$ не является корнем уравнения $x - \sqrt{x+6} = 0$. Функция обращается в нуль при $x = 3$.

51. а) Функция $y = 5x + \sqrt{x}$ возрастающая, так как она является суммой двух возрастающих функций $y = 5x$ и $y = \sqrt{x}$.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

202. На рисунке 2 изображены равнобедренный треугольник ABC, его высота BD и отрезок KL, параллельный основанию AC. Расстояние от вершины B до отрезка KL обозначим через x см, а длину отрезка KL — через y см: $BM = x$, $KL = y$.

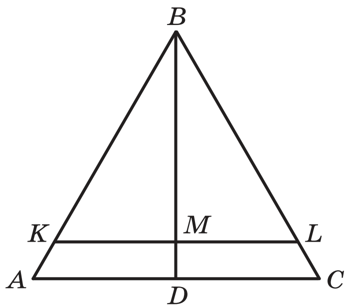

Рис. 2

По условию $AC = 6$ см, $BC = 5$ см. Отсюда $BD = 4$ см.

Из подобия треугольников KBL и ABC следует, что $\frac{KL}{AC} = \frac{BM}{BD}$, или $\frac{y}{6} = \frac{x}{4}$, т. е. $y = 1{,}5x$. Так как $0 \leqslant x \leqslant 4$, то $0 \leqslant y \leqslant 6$.

204. Скорость катера при его движении по течению реки от пристани A к пристани B равна 20 км/ч $(16 + 4)$. Время, затраченное катером на этот отрезок пути, равно 3 ч $(60 : 20)$.

Расстояние l от пристани A до катера в зависимости от времени t, где $0 \leqslant t \leqslant 3$, равно $20t$ км.

Прибыв через 3 ч на пристань B, катер простоял там 2 ч, следовательно, при $3 < t < 5$ расстояние l остаётся постоянным, равным 60 км.

Скорость катера при движении от пристани B к пристани A равна 12 км/ч $(16 - 4)$. На обратный путь катер затратил 5 ч $(60 : 12)$. В результате с момента отправления катера от пристани A до его возвращения пройдёт 10 ч. За это время катер преодолеет путь, равный 120 км $(60 + 60)$.

В период времени от 5 до 10 ч (после выхода от пристани B) расстояние катера от пристани A станет равным $(120 - 12t)$ км. Значит,

$$l = \begin{cases} 20t, \text{ если } 0 \leqslant t < 3, \\ 60, \text{ если } 3 \leqslant t < 5, \\ 120 - 12t, \text{ если } 5 \leqslant t \leqslant 10. \end{cases}$$

208. Если $y = f(x)$ — возрастающая функция, то она принимает каждое своё значение только один раз, поэтому уравнение $f(x) = a$, где a — некоторое число, или не имеет корней, или имеет единственный корень.

209. а) Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x} + x^2$. Область определения этой функции: $[0; +\infty)$.

В промежутке $[0; +\infty)$ каждая из функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ является возрастающей, следовательно, их сумма также является возрастающей функцией. Значит, уравнение $y = 18$ может иметь не более одного корня. Подбором находим, что $x = 4$. Этот корень единственный;

б) функция $y = x^3 + 5x$ является возрастающей на всём промежутке $(-\infty; +\infty)$ как сумма двух возрастающих функций. Найденный подбором корень $x = 1$ уравнения $y = 6$ является единственным.

211. Правильный ответ: $y = \sqrt{1 - x}$. Полезно предложить учащимся изобразить схематически графики функций $y = \sqrt{x - 1}$ и $y = \sqrt{x + 1}$.

213. График функции $y = \frac{6}{|x|}$ изображён на рисунке 3. На множестве $(-\infty; 0)$ он совпадает с ветвью гиперболы $y = -\frac{6}{x}$, а на множестве $(0; +\infty)$ — с ветвью гиперболы $y = \frac{6}{x}$.

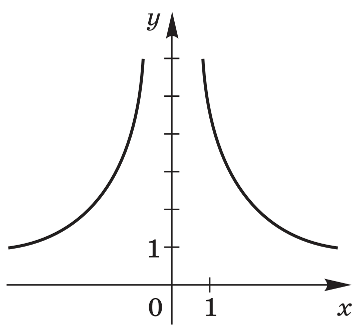

Рис. 3

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 1

10. а) $y = \dfrac{3}{1 - \dfrac{5}{x+2}}$. Ясно, что $x + 2 \neq 0$, т. е. $x \neq -2$.

Выполним преобразования: $\dfrac{3}{1 - \dfrac{5}{x+2}} = \dfrac{3(x+2)}{x+2-5} = \dfrac{3x+6}{x-3}$.

Отсюда $x \neq 3$. Следовательно, $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 3) \cup \cup (3; +\infty)$.

11. а) Рассмотрим два случая: $x \leqslant 5$ и $x > 5$.

Если $x \leqslant 5$, то $|5 - x| = 5 - x$ и $y = \sqrt{5 - x - 2x}$, т. е. $y = \sqrt{5 - 3x}$. Эта формула имеет смысл, если $5 - 3x \geqslant 0$, т. е.

$x \leqslant \frac{5}{3}$. Если $x > 5$, то $|5 - x| = x - 5$ и $y = \sqrt{x - 5 - 2x}$, т. е. $y = \sqrt{-5 - x}$. При $x > 5$ эта формула не имеет смысла, так как $-5 - x < 0$. В результате $D(y) = \left(-\infty;\ 1\frac{2}{3}\right]$.

12. $f(x) = \sqrt{x^2 - 12}$; $a \geqslant \sqrt{3}$. Найдём значение $f\left(a + \frac{3}{a}\right)$:

$$f\left(a + \frac{3}{a}\right) = \sqrt{\left(a + \frac{3}{a}\right)^2 - 12} = \sqrt{a^2 + 6 + \frac{9}{a^2} - 12} = \sqrt{a^2 - 6 + \frac{9}{a^2}} = \left|a - \frac{3}{a}\right|.$$

Если $a \geqslant \sqrt{3}$, то $a - \frac{3}{a} = \frac{a^2 - 3}{a} > 0$, тогда

$$\left|a - \frac{3}{a}\right| = a - \frac{3}{a} \text{ и } f\left(a + \frac{3}{a}\right) = a - \frac{3}{a}.$$

14. Зависимость периметра P от длины основания треугольника x выражается формулой $P = x + 70$.

Так как $P \geqslant 100$, то $x \geqslant 30$. Но $x < 70$ (длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон).

Значит, $D(P) = [30;\ 70)$; $E(P) = [100;\ 140)$.

15. б) Для упрощения вычислений можно предварительно освободиться от иррациональности в знаменателях дробей:

$$\frac{1}{2 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 2}{5 - 4} = \sqrt{5} - 2; \quad \frac{1}{2 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 2}{4 - 5} = -\sqrt{5} - 2.$$

Таким образом,

$$\varphi\left(\frac{1}{2 + \sqrt{5}}\right) + \varphi\left(\frac{1}{2 - \sqrt{5}}\right) = \varphi(\sqrt{5} - 2) + \varphi(-\sqrt{5} - 2) =$$
$$= \left(\sqrt{5} - 2\right)^2 - 4\left(\sqrt{5} - 2\right) + 1 + \left(\sqrt{5} + 2\right)^2 + 4\left(\sqrt{5} + 2\right) + 1 =$$
$$= 5 - 4\sqrt{5} + 4 - 4\sqrt{5} + 8 + 5 + 4\sqrt{5} + 4 + 4\sqrt{5} + 8 + 2 = 36.$$

Пункт 2

8. а) Чтобы найти нули функции $y = x^2 - 6x + 5$, приравняем значение трёхчлена к нулю и решим уравнение:

$$x^2 - 6x + 5 = 0;\ x_1 = 1,\ x_2 = 5.$$

Данная функция принимает положительные значения на множестве $(-\infty;\ 1) \cup (5;\ +\infty)$, а отрицательные значения — в промежутке $(1;\ 5)$;

б) $y = 0$ при $x(x^2 - 0{,}49) = 0$, т. е. при $x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}7$, $x_3 = 0{,}7$.

Данная функция принимает положительные значения на множестве $(-0,7;\ 0) \cup (0,7;\ +\infty)$, а отрицательные значения — на множестве $(-\infty;\ -0,7) \cup (0;\ 0,7)$.

11. б) Пусть $-4 < x_1 < x_2$. Составим разность $f(x_2) - f(x_1)$ и оценим её знак:

$$f(x_2) - f(x_1) = 3x_2 - 2 - \frac{1}{x_2+4} - 3x_1 + 2 + \frac{1}{x_1+4} =$$

$$= 3(x_2 - x_1) + \frac{1}{x_1+4} - \frac{1}{x_2+4} = 3(x_2 - x_1) + \frac{x_2 - x_1}{(x_1+4)(x_2+4)}.$$

Так как $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Каждый множитель в знаменателе дроби также принимает положительное значение, так как $x_2 > -4$ и $x_1 > -4$. Отсюда

$$f(x_2) - f(x_1) > 0.$$

Следовательно, при $x > -4$ функция $f(x)$ является возрастающей.

12. б) Пусть $-\frac{1}{3} < x_1 < x_2$. Составим разность $g(x_2) - g(x_1)$ и оценим её знак:

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{1}{9x_2+3} - \frac{1}{9x_1+3} = \frac{9(x_1 - x_2)}{9(3x_2+1)(3x_1+1)} = \frac{x_1 - x_2}{(3x_1+1)(3x_2+1)}.$$

Так как $x_1 < x_2$, то $x_1 - x_2 < 0$. Каждый множитель в знаменателе дроби принимает положительное значение, так как $x_1 > -\frac{1}{3}$ и $x_2 > -\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$g(x_2) - g(x_1) < 0.$$

Функция $g(x)$ является убывающей на множестве $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

13. На рисунке 4 изображена схематически прямая $y = -4x + \frac{b}{2}$. Отрезок $AO = \frac{b}{2}$. Координаты точки B найдём, приравняв значение y нулю:

$$-4x + \frac{b}{2} = 0;\ 4x = \frac{b}{2};\ x = \frac{b}{8}.$$

Следовательно, $OB = \frac{b}{8}$. Имеем уравнение

$$\frac{AO \cdot OB}{2} = 2;\ AO \cdot OB = 4;\ \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{8} = 4;$$

$b^2 = 64$; $b_1 = -8$, $b_2 = 8$. Задача имеет два решения.

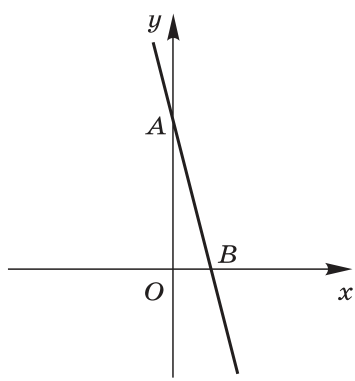

Рис. 4

§ 2. Квадратный трёхчлен

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
3	Квадратный трёхчлен и его корни	2 (2)
4	Разложение квадратного трёхчлена на множители	2 (3)
	Контрольная работа № 1	1

Содержание материала

В данном параграфе закладывается фундамент для изучения свойств квадратичной функции. Вводится понятие «квадратный трёхчлен». Учащиеся знакомятся с таким преобразованием, как выделение квадрата двучлена из квадратного трёхчлена. Доказывается теорема о разложении квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, имеющего корни x_1 и x_2, на множители $a(x-x_1)(x-x_2)$. Учащиеся выполняют различные задания, в которых эта теорема находит применение, в частности задания на сокращение дробей.

Основная цель

Основная цель изучения материала данного параграфа состоит в том, чтобы познакомить учащихся с понятием «квадратный трёхчлен», сформировать умения выделять квадрат двучлена из квадратного трёхчлена и выполнять разложение квадратного трёхчлена на множители, являющиеся многочленами первой степени.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

При изучении данного параграфа формируется умение учащихся представлять квадратный трёхчлен ax^2+bx+c в виде $a(x-m)^2+n$, где m и n — некоторые числа, или, как говорят, выделять квадрат двучлена из квадратного трёхчлена. Учащиеся овладевают умением использовать указанное преобразование при решении различных задач, в частности при определении множества значений квадратного трёхчлена, отыскании его наибольшего или наименьшего значения. Учащиеся выполняют различные задания на разложение квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, имеющего корни x_1 и x_2, на множители $a(x-x_1)(x-x_2)$ и учатся применять это преобразование в различных ситуациях, в частности при сокращении дробей.

Методический комментарий

Теоретический материал и система упражнений, представленные в пункте 3 «Квадратный трёхчлен и его корни», готовят учащихся к изучению свойств квадратичной функции. Следует обратить их внимание на то, что квадратным трёхчленом называют многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$. Важно подчеркнуть, что к квадратным трёхчленам относятся также такие из указанных многочленов второй степени, у которых один из коэффициентов b или c или даже оба эти коэффициента равны нулю.

Вводится понятие корня квадратного трёхчлена. Учащиеся выполняют упражнения **59—63**, в которых предлагается найти корни квадратного трёхчлена. При выполнении этих упражнений находит применение известная им из курса алгебры 8 класса формула корней квадратного уравнения. При необходимости можно порекомендовать слабым учащимся воспользоваться материалом, представленным в учебнике в разделе «Сведения из курса алгебры 7—8 классов». Полезно остановиться на задании **63**, где квадратный трёхчлен не задан, а его следует предварительно составить, опираясь на условие задачи.

Принципиально новым для учащихся является такое преобразование, как выделение квадрата двучлена из квадратного трёхчлена. Это преобразование используется при выполнении упражнений **64—71**. Специальное внимание следует уделить упражнению **66**, предназначенному для работы в парах. После завершения работы пар рекомендуется организовать коллективное обсуждение полученных ответов.

Заключительную группу упражнений составляют задания **68—71**, связанные с нахождением наименьшего или наибольшего значения квадратного трёхчлена. Прежде чем учащиеся приступят к выполнению данных упражнений, рекомендуется познакомить их с разобранным в учебнике авторским примером 2. Ознакомление с этим примером позволит учащимся успешно справиться с упражнением **70**, где представлена задача-исследование. Поиск путей решения подобных задач в контакте с одноклассниками и учителем способствует формированию коммуникативной компетентности учащихся. Рекомендуется специально остановиться на упражнении **71**, которое иллюстрирует практическую значимость формируемых в курсе знаний и умений.

В пункте 4 «Разложение квадратного трёхчлена на множители» доказывается теорема о возможности представления квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, имеющего корни x_1 и x_2, в виде произведения $a(x - x_1)(x - x_2)$. При доказательстве этой теоремы необходимо напомнить учащимся формулировку теоремы Виета. Следует специально остановиться на доказательстве утверждения о том, что если квадратный трёхчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на множители, являющиеся многочленами первой степени. На этом примере учащиеся встречаются с таким приёмом доказательства, как рассуждение от противного. Применение доказанной в данном пункте теоремы иллюстрируется в авторских примерах 1—3.

Учащиеся выполняют различные задания на разложение квадратных трёхчленов на множители и использование этого преобразования для сокращения дробей. Следует обратить их внимание на упражнения **80** и **81** с проблемной постановкой вопросов, а также на упражнение **82**, в котором требуется провести определённое исследование.

Из дополнительных упражнений к параграфу 2 рекомендуется использовать, при наличии времени, задания **216**, **223**, **225**, выполнение которых связано с определёнными исследованиями.

Указания к основным упражнениям учебника

63. Известно, что в квадратном трёхчлене $ax^2 + bx + c$ сумма $a + b + c$ равна нулю, при этом $c = 4a$. Выразим через a все коэффициенты квадратного трёхчлена:

$$a + b + 4a = 0; \quad b = -5a.$$

Отсюда $ax^2 - 5ax + 4a = 0$ $(a \neq 0)$; $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

66. (*Для работы в парах.*) Упражнение можно выполнить, выделив из квадратного трёхчлена квадрат двучлена:

а) $x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 9 + 1 = (x - 3)^2 + 1 > 0$;

б) $5x^2 - 10x + 5 = 5(x^2 - 2x + 1) = 5(x - 1)^2 \geqslant 0$;

в) $-x^2 + 20x - 100 = -(x^2 - 20x + 100) = -(x - 10)^2 \leqslant 0$;

г) $-2x^2 + 16x - 33 = -2x^2 + 16x - 32 - 1 = -2(x^2 - 8x + 16) - 1 = -2(x - 4)^2 - 1 < 0$;

д) $x^2 - 0{,}32x + 0{,}0256 = (x - 0{,}16)^2 \geqslant 0$;

е) $4x^2 + 0{,}8x + 2 = 4(x^2 + 0{,}2x + 0{,}01) + 1{,}96 = 4(x + 0{,}1)^2 + 1{,}96 > 0$.

68. Выделим из квадратного трёхчлена $2x^2 - 4x + 6$ квадрат двучлена:

$$2x^2 - 4x + 6 = 2(x^2 - 2x + 1) + 4 = 2(x - 1)^2 + 4.$$

Квадратный трёхчлен принимает наименьшее значение, равное 4, при $x = 1$.

В связи с выполнением этого задания полезно провести обобщение. Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ представить в виде $a(x - m)^2 + n$, то легко сообразить, что если

$a > 0$, то этот трёхчлен имеет наименьшее значение, равное n, при $x = m$, а если $a < 0$, то он имеет наибольшее значение, равное n, при $x = m$.

70. (*Задача-исследование.*) Пусть x см — один из катетов прямоугольного треугольника, тогда второй катет равен $(6 - x)$ см, а площадь треугольника y см^2 равна $\frac{(6-x)x}{2}$.

Отсюда $2y = (6 - x)x$.

Выделим из квадратного трёхчлена $-x^2 + 6x$ квадрат двучлена:

$$-x^2 + 6x = -(x - 3)^2 + 9.$$

Это выражение принимает наибольшее значение, равное 9, при $x = 3$.

Значит, из всех прямоугольных треугольников с суммой катетов, равной 6, наибольшую площадь имеет равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами 3 и 3 см. Его площадь равна 4,5 см^2.

76. е) $-x^2 - 8x + 9 = 0$; $x^2 + 8x - 9 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -9$; $-x^2 - 8x + 9 = -(x - 1)(x + 9)$;

з) $5y^2 + 2y - 3 = 0$; $D = 4 + 60 = 64$; $y_1 = -1$; $y_2 = \frac{3}{5}$;

$5y^2 + 2y - 3 = 5(y + 1)\left(y - \frac{3}{5}\right) = (y + 1)(5y - 3)$.

80. Квадратный трёхчлен можно представить в виде произведения многочленов первой степени, если его дискриминант неотрицателен. Это можно сделать в заданиях а), в) и г). В задании б) дискриминант трёхчлена $D = 81 - 112 < 0$, следовательно, трёхчлен $4b^2 - 9b + 7$ нельзя представить в виде произведения многочленов первой степени.

81. Пусть квадратный трёхчлен имеет вид $ax^2 + ax + a$, где $a \neq 0$; $ax^2 + ax + a = a(x^2 + x + 1)$.

Квадратный трёхчлен $x^2 + x + 1$ не имеет корней, так как его дискриминант $D = 2 - 4 < 0$. Следовательно, этот квадратный трёхчлен нельзя разложить на множители.

82. Примером может служить трёхчлен $3x^2 + 9x + 6$. Он имеет корни, так как $D = 81 - 72 = 9 > 0$.

$$3x^2 + 9x + 6 = 3(x^2 + 3x + 2) = 3(x + 1)(x + 2).$$

Указания к дополнительным упражнениям учебника

216. Найдём значение p, воспользовавшись тем, что один из корней трёхчлена $2px^2 - 2x - 2p - 3$ равен нулю. Имеем $-2p - 3 = 0$; $p = -\frac{3}{2}$.

Следовательно, квадратный трёхчлен имеет вид $-3x^2 - 2x$. Второй корень этого трёхчлена равен $-\frac{2}{3}$.

217. Сначала надо убедиться в том, что дискриминант квадратного трёхчлена неотрицателен, а затем воспользоваться теоремой Виета.

г) $D = \frac{1}{9} + 1 \geqslant 0$; $\quad x_1 + x_2 = -\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$; $\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$.

218. На основании теоремы Виета имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

Пусть $x_1 = p$, а $x_2 = q$, $p \neq 0$, $q \neq 0$. Тогда $\begin{cases} p + q = -p, \\ pq = q. \end{cases}$

Отсюда $p = 1$, $q = -2$. Значит, квадратный трёхчлен имеет вид $x^2 + x - 2$.

219. По теореме Виета $\begin{cases} \alpha + \beta = -p, \\ \alpha\beta = q. \end{cases}$

По условию $\alpha\beta = 4$, следовательно, $q = 4$. Известно, что $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 3$.

Возведя в квадрат обе части этого равенства, получим

$$\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 9.$$

Отсюда

$$\alpha + \beta = 9 - 2\sqrt{\alpha\beta} = 9 - 4 = 5.$$

Значит, $p = -5$, а квадратный трёхчлен имеет вид $x^2 - 5x + 4$. Его корни: $\alpha = 1$, $\beta = 4$ или $\alpha = 4$, $\beta = 1$.

221. а) $-x^2 + 20x - 103 = -(x^2 - 20x + 100) + 100 - 103 = -(x - 10)^2 - 3$.

Значение трёхчлена отрицательно при любом значении x, следовательно, этот трёхчлен не принимает положительных значений.

223. Известно, что $a + b = 40$, где $a > 0$, $b > 0$. Отсюда $b = 40 - a$. Произведение этих чисел равно

$$ab = a(40 - a) = -a^2 + 40a = -(a^2 - 40a + 400) + 400 = \\ = -(a - 20)^2 + 400.$$

Полученная сумма принимает наибольшее значение при $a = 20$. Тогда $b = 20$.

225. При $m = 0$ получим уравнение $-3x - 3 = 0$, имеющее целый корень $x = -1$.

Пусть $m \neq 0$. Разделив на m все коэффициенты уравнения, получим

$$x^2 + \left(1 - \frac{3}{m}\right)x - \frac{3}{m} = 0.$$

Значение дроби $\frac{3}{m}$ является целым числом, если m — делитель числа 3, т. е. равно одному из чисел: 1, −1, 3, −3.

При $m = 1$ получим трёхчлен $x^2 - 2x - 3$, имеющий целые корни −1 и 3.

При $m = -1$ получим трёхчлен $x^2 + 4x + 3$, имеющий целые корни −1 и −3.

При $m = 3$ получим трёхчлен $x^2 - 1$, имеющий целые корни −1 и 1.

При $m = -3$ получим трёхчлен $x^2 + 2x + 1$, имеющий целый корень −1.

226. Коэффициенты квадратного трёхчлена имеют вид $(n - 3)$, $(n + 1)$ и $(9 - 2n)$. Они являются натуральными числами, следовательно, каждое из них не меньше 1.

Из неравенств $n - 3 \geqslant 1$ и $9 - 2n \geqslant 1$ получаем $n \geqslant 4$ и $n \leqslant 4$, т. е. $n = 4$.

Трёхчлен имеет вид $x^2 + 5x + 1$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 3

8. Значения квадратных трёхчленов являются противоположными числами, если их сумма равна нулю. Имеем

$$(3x^2 - 11x + 16) + (2x^2 - 7x - 3) = 0; \quad 5x^2 - 18x + 13 = 0;$$

$$x_1 = 1, \; x_2 = 2\frac{3}{5}.$$

9. Найдём корни трёхчлена $2x^2 - 11x + 5$:

$2x^2 - 11x + 5 = 0$; $D = 121 - 40 = 81$; $x_{1,2} = \frac{11 \pm 9}{4}$; $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 5$.

а) Противоположными этим корням трёхчлена являются числа $y_1 = -\frac{1}{2}$ и $y_2 = -5$. Их сумма равна $-\frac{11}{2}$, а произведение равно $\frac{5}{2}$. Трёхчлен с такими корнями имеет вид $y^2 + 5{,}5y + 2{,}5$;

б) обратными этим корням трёхчлена являются числа $z_1 = 2$ и $z_2 = \frac{1}{5}$. Их сумма равна $2\frac{1}{5}$, а произведение равно $\frac{2}{5}$. Трёхчлен с такими корнями имеет вид $z^2 - 2{,}2z + 0{,}4$.

12. а) $x^2+3x+q=x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+q=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(q-\frac{9}{4}\right).$

Трёхчлен является полным квадратом двучлена, если $q-\frac{9}{4}=0$, т. е. $q=\frac{9}{4}$.

13. Для доказательства следует выделить из квадратного трёхчлена квадрат двучлена.

а) $x^2-8x+20=x^2-8x+16+4=(x-4)^2+4$.

Значение этого выражения положительно при любом значении x;

б) $-2x^2+28x-99=-2(x^2-14x+49)+98-99=$ $=-2\cdot(x-7)^2-1$.

Значение этого выражения отрицательно при любом значении x.

14. а) Квадратный трёхчлен не имеет корней, если его дискриминант отрицателен. Найдём дискриминант данного трёхчлена:

$$D=4(b-2)^2-4(b+3)(b-1)=4(b^2-4b+4)-4(b^2+2b-3)=$$
$$=4(b^2-4b+4-b^2-2b+3)=4(-6b+7);$$

$D<0$, если $-6b+7<0$, т. е. $b>1\frac{1}{6}$.

17. Выделим из квадратного трёхчлена $3x^2-15x+27$ квадрат двучлена:

$$3x^2-15x+27=3\left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right)-\frac{75}{4}+27=3\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+8\frac{1}{4}.$$

Трёхчлен принимает наименьшее значение, равное 8,25, при $x=2{,}5$.

18. Пусть a см — катет прямоугольного треугольника, тогда второй его катет равен $(18-a)$ см, а площадь треугольника $S=\frac{a(18-a)}{2}$ (см^2).

$$2S=18a-a^2;\quad -a^2+18a=-a^2+18a-81+81=-(a-9)^2+81.$$

Наибольшее значение удвоенной площади треугольника равно 81 при $a=9$. Тогда $b=9$. Следовательно, наибольшую площадь из всех прямоугольных треугольников с суммой катетов 18 см имеет равнобедренный прямоугольный треугольник.

Пункт 4

8. Квадратный трёхчлен нельзя разложить на множители, являющиеся многочленами первой степени, если его дискриминант отрицателен.

Имеем

$$D = 4n^2 - 4(n-4)(n-7) = 4n^2 - 4n^2 + 16n + 28n - 112 =$$
$$= 44n - 112.$$

Дискриминант трёхчлена отрицателен, если $44n - 112 < 0$, т. е. $n < 2\frac{6}{11}$.

9. Разложим на множители числитель и знаменатель первой дроби.

Корни квадратного трёхчлена $x^2 - x - 6$ равны -2 и 3, следовательно, $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$.

Найдём корни квадратного трёхчлена $0{,}5x^2 - 4x - 10$:

$$0{,}5x^2 - 4x - 10 = 0; \quad D = 16 + 20 = 36;$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{1}; \; x_1 = -2, \; x_2 = 10.$$

Имеем $0{,}5x^2 - 4x - 10 = 0{,}5(x+2)(x-10)$.

Первая дробь примет вид $\frac{(x+2)(x-3)}{0{,}5(x+2)(x-10)} = \frac{2(x-3)}{x-10}$.

Значит, $\frac{2(x-3)}{x-10} - \frac{x+2}{x-10} = \frac{2x-6-x-2}{x-10} = \frac{x-8}{x-10}$.

10. Найдём корни трёхчлена $mx^2 + 2(m-1)x + (m-2)$, где m — некоторое число, отличное от нуля:

$$mx^2 + 2(m-1)x + (m-2) = 0;$$

$$\frac{D}{4} = (m-1)^2 - m(m-2) = m^2 - 2m + 1 - m^2 + 2m = 1.$$

$$x_{1,2} = \frac{-m+1 \pm 1}{m}; \; x_1 = -1, \; x_2 = \frac{2-m}{m};$$

$$mx^2 + 2(m-1)x + (m-2) = m(x+1)\left(x - \frac{2-m}{m}\right) =$$
$$= (mx - 2 + m)(x+1).$$

11. Дискриминант D квадратного трёхчлена $3x^2 + bx - 8$ равен $b^2 + 96$. Он положителен при любом значении b, следовательно, квадратный трёхчлен имеет два корня: x_1 и x_2. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = -\frac{8}{3}$. Произведение корней отрицательно, следовательно, они имеют разные знаки.

12. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби.

$x^3 - 4x - 3x^2 + 12 = x(x^2-4) - 3(x^2-4) = (x^2-4)(x-3) = (x-2)(x+2)(x-3)$;

$2x^2 - 10x + 12 = 2(x-2)(x-3)$;

$$\frac{(x-2)(x+2)(x-3)}{2(x-2)(x-3)} = \frac{x+2}{2} = \frac{x}{2}+1,$$

если $x \neq 2$; $x \neq 3$.

Графиком функции является прямая $y = \frac{x}{2}+1$ с двумя «выколотыми» точками, имеющими абсциссы 2 и 3.

График данной функции изображён на рисунке 5.

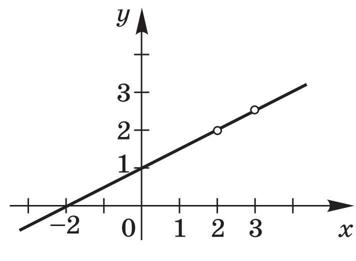

Рис. 5

§ 3. Квадратичная функция и её график

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
5	Функция $y = ax^2$, её график и свойства	2 (3)
6	Графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x-m)^2$	2 (3)
7	Построение графика квадратичной функции	4 (5)

Содержание материала

Систематизация и расширение общих сведений о функциях, проведённые в параграфе 1, а также ознакомление учащихся в параграфе 2 с такими преобразованиями, как выделение квадрата двучлена из квадратного трёхчлена и разложение квадратного трёхчлена на множители, позволили создать базу для обстоятельного рассмотрения в параграфе 3 свойств квадратичной функции.

Первым шагом, который делают учащиеся, является построение графиков функций вида $y = ax^2$ и сопоставление их с графиком функции $y = x^2$. Тем самым закладывается база для ознакомления учащихся с графиками функций вида $y = ax^2 + n$ и $y = a(x-m)^2$. Далее учащиеся знакомятся с графиком функции вида $y = a(x-m)^2 + n$. Они узнают, что этот график представляет собой параболу, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси x на m единиц вправо при $m > 0$ или на $-m$ единиц влево при $m < 0$ и сдвига вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, или на $-n$ единиц вниз, если $n < 0$. Наконец, представление формулы $y = ax^2 + bx + c$ в виде $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ позволяет сделать вывод, что графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, которую можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов — сдвига вдоль оси x и сдвига вдоль оси y. Вершиной параболы служит точка с координатами $(m; n)$, где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$, а осью симметрии служит прямая $x = m$. Ветви параболы направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$.

Учащимся предлагаются различные упражнения, связанные с построением и чтением графиков функций, заданных формулами вида $y = ax^2$, $y = ax^2 + n$, $y = a(x - m)^2$, $y = ax^2 + bx + c$.

Основная цель

Основная цель изучения материала данного параграфа состоит в том, чтобы сформировать умение учащихся строить графики квадратичных функций, заданных формулами вида

$$y = ax^2,\ y = ax^2 + n,\ y = a(x - m)^2,\ y = ax^2 + bx + c,$$

перечислять свойства этих функций, используя построенные графики.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

В ходе изучения параграфа 3 учащиеся овладевают умением строить графики функций, заданных формулами $y = ax^2$, $y = ax^2 + n$, $y = a(x - m)^2$. Приступая к построению этих графиков, они должны знать, какой вид имеет график: каковы координаты вершины параболы, куда направлены её ветви, в чём состоят особенности её расположения относительно осей координат. Тем самым закладывается база для формирования умения учащихся строить график квадратичной функции, заданной формулой вида $y = ax^2 + bx + c$. Первым шагом при построении такого графика является определение координат вершины параболы. Учащимся известно, что осью симметрии параболы является прямая $x = m$, где m — абсцисса вершины параболы. Этот факт они должны учитывать при составлении таблицы значений функции, выбирая в качестве значений аргумента такие пары чисел, которым соответствуют равные значения функции.

Учащиеся овладевают умением по графику функции, заданной формулой $y = ax^2 + bx + c$, находить значения функции, соответствующие указанным значениям аргумента, а также определять, при каких значениях аргумента функция принимает указанное значение. Они должны уметь находить, пользуясь графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, нули этой функции и промежутки знакопостоянства, а также промежутки возрастания и убывания функции, определять её область значений.

Методический комментарий

Изучению свойств и графиков функций, заданных формулами $y = ax^2$, $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$, посвящены пункты 5 и 6. В пункте 5 рассматривается функция $y = ax^2$. Учащиеся узнают, что при положительных значениях a график этой функции можно получить из графика функции $y = x^2$ с помощью растяжения от оси x в a раз, если $a > 1$, или сжатия к оси x в $\frac{1}{a}$ раз, если $0 < a < 1$. Они должны запомнить сформулированные в учебнике свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$ и при $a < 0$. Выполнение упражнений **90—98** помогает учащимся запомнить эти свойства. Рекомендуется специально остановиться на упражнении **99**, обратив внимание учащихся на то, что ветви графика функции $y = 0{,}01x^2$ поднимаются бесконечно вверх. В упражнениях **101** и **102** важно подчеркнуть, что речь идёт о функциях, задаваемых формулами $y = ax^2$ на множестве положительных чисел. Графиком каждой из этих функций является одна ветвь параболы, причём начало координат не принадлежит графику.

В пункте 6 учащиеся знакомятся с графиками функций $y = ax^2 + n$, $y = a(x - m)^2$, $y = a(x - m)^2 + n$. Они должны уметь описывать расположение этих графиков на координатной плоскости. Рекомендуется специально остановиться на рассмотренном в этом пункте авторском примере 2, иллюстрирующем практическую значимость формируемых в данном параграфе знаний. Полезно познакомить учащихся с понятиями «параболоид», «фокус параболоида», с легендой об использовании Архимедом параболических зеркал в войне против римлян. Такого рода рассказы могут увеличить число учащихся, интересующихся математикой.

Сведения о функциях $y = ax^2$, $y = ax^2 + n$, $y = a(x - m)^2$, $y = a(x - m)^2 + n$, приобретённые учащимися при изучении пунктов 5 и 6, а также накопленный ими опыт построения этих графиков создают благоприятные условия для изучения пункта 7. Первый шаг, на который следует обратить внимание учащихся, состоит в представлении квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ в виде $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Отсюда делается вывод, что графиком функции, заданной формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, является парабола, вершиной которой служит точка с координатами $(m;\ n)$, где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$. Учащиеся должны запомнить эти формулы, научиться пользоваться ими, а также уметь определять направление ветвей параболы. Важно напомнить учащимся, что прямая $x = m$, где m — абсцисса вершины параболы, является осью симметрии параболы. Этот факт они должны учитывать при составлении таблицы значений функции, заданной формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, выбирая пары значений x, симметричные относительно оси параболы. Важно обратить внимание учащихся на то, что полезно найти нули функции и координаты точки пересечения параболы с осью y.

После рассмотрения авторских примеров 1—3, приведённых в пункте 7, учащиеся могут приступить к выполнению включённых в этот пункт упражнений. Рекомендуется прежде всего остановиться на упражнении **120**, в котором приводится график зависимости между реальными величинами. Подобные упражнения убеждают учащихся в значимости приобретаемых ими знаний и умений. Далее можно предложить учащимся выполнить упражнения **121—127**, связанные с построением и чтением графиков квадратичной функции. Рекомендуется специально остановиться на упражнениях **128—130**, в которых известные учащимся сведения о квадратичной функции используются в усложнённой ситуации. Специальное внимание следует уделить задаче-исследованию, представленной в упражнении **131**. При решении этой задачи учащиеся должны мотивировать свои ответы, приводить необходимые обоснования. Коллективное решение подобных задач способствует повышению коммуникативной компетентности учащихся. Из дополнительных упражнений к параграфу 3 рекомендуется использовать упражнение **245**, где рассматривается квадратичная функция, описывающая реальную ситуацию.

Указания к основным упражнениям учебника

96. б) Для ответа на поставленный вопрос следует составить уравнение $2x^2 = 100$ и выяснить, имеет ли оно корни:

$$2x^2 = 100;\ x^2 = 50;\quad x_1 = -5\sqrt{2};\ x_2 = 5\sqrt{2}.$$

Парабола $y = 2x^2$ и прямая $y = 100$ пересекаются в точках с координатами $\left(-5\sqrt{2}; 100\right)$ и $\left(5\sqrt{2}; 100\right)$;

в) уравнение $2x^2 = -8$ не имеет корней. Парабола $y = 2x^2$ и прямая $y = -8$ не пересекаются. Этот факт учащиеся могут установить, исходя из расположения графиков параболы $y = 2x^2$ (в верхней полуплоскости) и прямой $y = -8$ (в нижней полуплоскости).

99. Решим уравнение $0{,}01x^2 = 10x$.

$0{,}01x^2 - 10x = 0$; $x(0{,}01x - 10) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1000$.

Графики заданных функций имеют две общие точки: (0; 0) и (1000; 10 000).

100. Из равенств $y = x^2$ и $y = kx - 4$ получим $x^2 = kx - 4$. Квадратное уравнение $x^2 - kx + 4 = 0$ имеет один корень, если его дискриминант равен нулю.

$D = k^2 - 16$; $D = 0$ при $k = -4$ и $k = 4$.

Следовательно, прямая $y = kx - 4$ имеет с параболой $y = x^2$ только одну общую точку, если $k = -4$ или $k = 4$.

Это означает, что прямые

$$y = -4x - 4 \text{ и } y = 4x - 4$$

являются касательными к параболе $y = x^2$. Графическая иллюстрация решения дана на рисунке 6.

101. При построении графика функции $S = \pi r^2$ можно считать, что $\pi \approx 3$. Следует учесть, что $r > 0$.

121. а) Координаты точки $A(m; n)$ — вершины параболы $y = x^2 - 4x + 7$ находим по формулам $m = -\frac{b}{2a}$ и $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, где a, b, c — коэффициенты квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

Имеем $m = \frac{4}{2} = 2$; $n = -\frac{16 - 28}{4} = 3$.

Вершина параболы имеет координаты (2; 3).

122. Для построения графика функции $y = -x^2 + 2x + 8$ надо сначала найти координаты m и n вершины параболы: $m = -\frac{2}{-2} = 1$; $n = -\frac{4 + 32}{-4} = 9$.

Вершина параболы имеет координаты (1; 9).

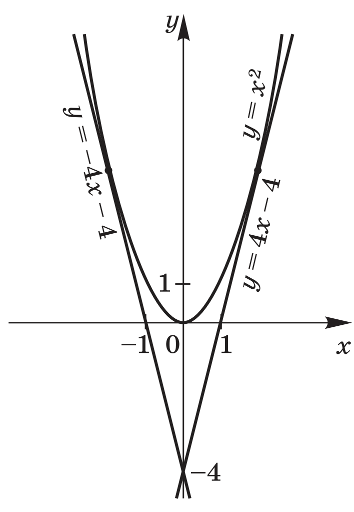

Рис. 6

Затем надо найти точки параболы с положительными абсциссами. Например: (2; 8), (3; 5), (4; 0), (5; −7). Координаты точек параболы, симметричных найденным относительно прямой $x = 1$, уже не надо вычислять. Это точки (0; 8), (−1; 5), (−2; 0), (−3; −7).

Построение параболы следует выполнить более тщательно (по сравнению с заданиями, где требовалось изобразить график схематически);

в) $y = 0$ при $x = -2$ и $x = 4$; $y > 0$ при $x \in (-2;\ 4)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty;\ -2) \cup (4;\ +\infty)$;

г) функция возрастает в промежутке $(-\infty;\ 1]$ и убывает в промежутке $[1;\ +\infty)$. Областью значений функции является промежуток $(-\infty;\ 9)$.

128. Сначала следует обратить внимание на направление ветвей параболы. Ветви параболы, изображённой на рисунке 35 учебника, направлены вверх, следовательно, можно сразу исключить функцию $y = -x^2 - 6$, так как коэффициент при x^2 отрицателен.

График функции $y = x^2 + 6x$ пересекает ось x в точках с абсциссами 0 и −6, а график функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ пересекает ось x в точках с абсциссами 0 и 6. Следовательно, на рисунке изображён график функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$.

129. Прямая $y = 6x + b$ касается параболы $y = x^2 + 8$, если уравнение $x^2 + 8 = 6x + b$ имеет единственное решение, т. е. если дискриминант трёхчлена $x^2 - 6x + (8 - b)$ равен нулю.

$$D = 36 - 4(8 - b);\ 36 - 32 + 4b = 4 + 4b;\ D = 0 \text{ при } b = -1.$$

130. Графики функций $y = 2x^2 - 5x + 6$ и $y = x^2 - 7x + n$ имеют только одну общую точку, если уравнение

$$2x^2 - 5x + 6 = x^2 - 7x + n$$

имеет единственное решение, т. е. если дискриминант квадратного уравнения $x^2 + 2x + (6 - n) = 0$ равен нулю.

$$D = 4 - 4(6 - n) = 4n - 20;$$
$$D = 0 \text{ при } n = 5.$$

Чтобы найти координаты общей точки, решим уравнение $x^2 + 2x + 1 = 0$:

$$(x + 1)^2 = 0;\ x = -1;$$
$$y = 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 = 13.$$

Координаты общей точки: $x = -1$, $y = 13$.

131. Из рисунка 36, *а* учебника видно, что точка $(0;\ c)$, в которой парабола пересекает ось y, расположена ниже оси x, т. е. $c < 0$.

Ветви параболы направлены вниз, т. е. $a < 0$.

Вершина параболы расположена правее оси y, т. е. её абсцисса $-\frac{b}{2a}$ больше нуля. Имеем $-\frac{b}{2a} > 0$, $a < 0$, следовательно, $b > 0$.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

232. Решив уравнение $ax^2 = ax$, получим:

$$ax(x-1) = 0; \quad x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Графики функций пересекаются в точках $(0;\ 0)$ и $(1;\ a)$.

234. б) График функции $y = -\sqrt{x}$ можно получить из графика функции $y = \sqrt{x}$ в результате осевой симметрии относительно оси x; график функции $y = \sqrt{x+5}$ можно получить из графика функции $y = \sqrt{x}$ в результате параллельного переноса на 5 единиц влево вдоль оси x; график функции $y = \sqrt{x} - 1$ можно получить из графика функции $y = \sqrt{x}$ в результате параллельного переноса на одну единицу вниз вдоль оси y.

235. График функции $y = |x - 4|$ получается из графика функции $y = |x|$ в результате параллельного переноса на 4 единицы вправо вдоль оси x, а график функции $y = |x - 4| - 3$ получается из графика функции $y = |x - 4|$ в результате параллельного переноса на 3 единицы вниз вдоль оси y (рис. 7).

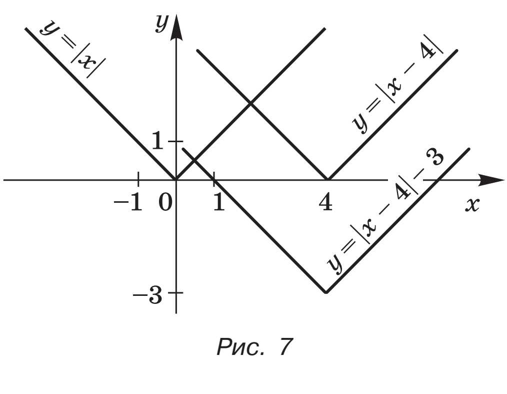

Рис. 7

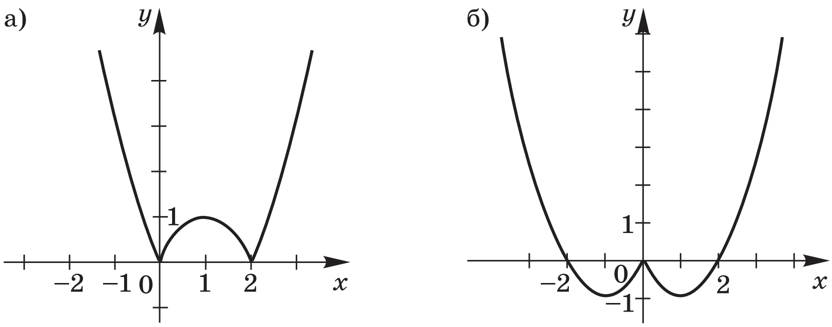

Рис. 8

236. а) Рассмотрим два случая:
1) $x^2 - 2x \geqslant 0$, если $x \leqslant 0$ или $x \geqslant 2$;
2) $x^2 - 2x < 0$, если $0 < x < 2$.
Функцию $f(x)$ можно задать следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ -x^2 + 2x, \text{ если } 0 < x < 2, \\ x^2 - 2x, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

График этой функции представлен на рисунке 8, *а*;

б) функцию $f(x) = x^2 - 2|x|$ можно задать с помощью нескольких формул:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ x^2 + 2x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

График этой функции изображён на рисунке 8, *б*.

237. а) Функцию $y = x|x|$ можно задать с помощью нескольких формул:

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x^2, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

График этой функции изображён на рисунке 9, *а*;

б) график функции $y = -\frac{x^3}{|x|}$ изображён на рисунке 9, *б*.
Следует обратить внимание учащихся на то, что точка $O(0;\ 0)$ графику не принадлежит.

238. Преобразуем квадратный трёхчлен $x^2 - 6x + c$, выделив из него квадрат двучлена:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + c = (x - 3)^2 + (c - 9).$$

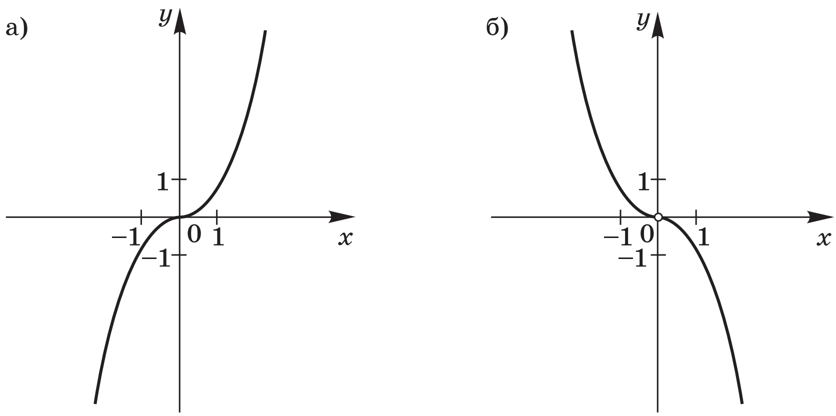

Рис. 9

а) График функции расположен выше прямой $y=4$ при $c-9>4$, т. е. при $c>13$;

б) график функции расположен выше прямой $y=-1$ при $c-9>-1$, т. е. при $c>8$.

239. Воспользуемся формулами для вычисления координат m и n вершины параболы $y=ax^2+bx+c$.

Для параболы $y=x^2+bx+c$ имеем

$$m=-\frac{b}{2};\quad n=-\frac{b^2-4c}{4}.$$

По условию $m=6$, $n=-12$. Следовательно, $-\frac{b}{2}=6$, $-\frac{b^2-4c}{4}=-12$. Отсюда $b=-12$, $c=24$.

240. Ось симметрии параболы проходит через её вершину $A(m;\ n)$.

Для параболы $y=ax^2-16x+1$ имеем $m=\frac{16}{2a}=\frac{8}{a}$. По условию $m=4$, следовательно, $\frac{8}{a}=4$; $a=2$.

241. Уравнение $ax^2+c=0$ имеет корни тогда и только тогда, когда значения a и c являются числами разных знаков. При этом условии функция $y=ax^2+c$ имеет нули.

242. Подставив в формулу $ax^2+bx-18=y$ координаты точек $M(1;\ 2)$ и $N(2;\ 10)$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}a+b-18=2,\\ 4a+2b-18=10;\end{cases}\qquad \begin{cases}a+b=20,\\ 2a+b=14.\end{cases}$$

Решением системы служит пара чисел $a=-6$ и $b=26$.

244. а) Область значений функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ — множество $[n;\ +\infty)$, где n — ордината вершины параболы, являющейся графиком этой функции.

Для функции $y = 3x^2 - 0{,}5x + \frac{1}{16}$ имеем

$$n = -\frac{0{,}25 - 0{,}75}{12} = \frac{1}{24}.$$

Область значений данной функции — промежуток $\left[\frac{1}{24};\ +\infty\right)$.

245. Чтобы ответить на вопросы задачи, надо исследовать функцию $h = 24t - 4{,}9t^2$. Графиком этой функции служит парабола с вершиной $A(m;\ n)$, где $m = -\frac{24}{-9{,}8} \approx 2{,}4$; $n = -\frac{24^2}{4 \cdot (-4{,}9)} \approx 29{,}4$. Ветви параболы направлены вниз.

Нулями функции являются значения $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{24}{4{,}9} \approx 4{,}9$.

В промежутке $[0;\ 2{,}4)$ функция возрастает, а в промежутке $(2{,}4;\ 4{,}9)$ — убывает.

Отсюда следует, что наибольшей высоты, равной $\approx 29{,}4$ м, мяч достигает примерно через 2,4 с после начала полёта. Мяч упал на землю примерно через 4,9 с после броска. Он поднимался при $0 < t < 2{,}4$ и опускался при $2{,}4 < t < 4{,}9$.

246. а) Примером такой квадратичной функции может служить любая функция вида $a(x + 3)^2 + n$, где $a > 0$ и n — любое число;

б) примером такой квадратичной функции может служить любая функция вида $a(x - 6)^2 + n$, где $a < 0$ и n — любое число.

247. а) Подставив значения $x = 3$ и $x = 4$ в уравнение $x^2 + px + q = 0$, получим систему уравнений относительно p и q

$$\begin{cases} 9 + 3p + q = 0, \\ 16 + 4p + q = 0. \end{cases}$$

Отсюда $p = -7$, $q = 12$;

б) подставив координаты точек $(0;\ 6)$ и $(2;\ 0)$ в уравнение $y = x^2 + px + q$ и решив полученные уравнения, найдём, что $p = -5$, $q = 6$;

в) наименьшее значение функция принимает в точке $A(m;\ n)$ — вершине параболы, являющейся графиком функции $y = x^2 + px + q$.

Имеем $m = -\frac{p}{2}$; $n = -\frac{p^2 - 4q}{4} = q - \frac{p^2}{4}$.

По условию $m = 6$, $n = 24$, следовательно, $-\frac{p}{2} = 6$; $q - \frac{p^2}{4} = 24$. Отсюда $p = -12$, $q = 60$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 5

8. Парабола $y = kx^2$ не имеет общих точек с прямой $y = 4x - 1$, если уравнение $kx^2 = 4x - 1$ не имеет решений, т. е. если его дискриминант отрицателен:

$D = 16 - 4k$; $D < 0$ при $k > 4$.

9. а) Прямая $y = 3 - 2x$ касается параболы $y = (k - 2)x^2$, если уравнение $3 - 2x = (k - 2)x^2$ имеет единственное решение, т. е. если дискриминант уравнения $(k - 2)x^2 + 2x - 3 = 0$ равен нулю:

$D = 4 + 12(k - 2) = 12k - 20$; $D = 0$, если $k = 1\frac{2}{3}$.

10. Найдём координаты точки A, в которой прямая $x = 2$ пересекает параболу $y = 6x^2$, и точки B, в которой прямая $x = 2$ пересекает параболу $y = -\frac{1}{5}x^2$. Получим $A(2;\ 24)$ и $B\left(2;\ -\frac{4}{5}\right)$.

Точки A и B находятся на одной прямой $x = 2$, параллельной оси y, по разные стороны от оси x, следовательно, расстояние между ними равно $24 + \frac{4}{5}$, т. е. равно 24,8.

Пункт 6

8. Осью симметрии параболы $y = 5(x + 4a^2)^2 + 1$ является прямая, параллельная оси y и проходящая через вершину параболы.

Вершина параболы имеет абсциссу, равную $-4a^2$, следовательно, ось симметрии параболы задаётся уравнением $x = -4a^2$. По условию $x = -9$. Отсюда $-4a^2 = -9$; $a = -1{,}5$ или $a = 1{,}5$.

9. Подставив в уравнение $y = 3{,}5x^2 + 1$ значение $x = -3$, получим координаты точки C: $x = -3$, $y = 3{,}5 \cdot 9 + 1 = 32{,}5$.

Подставив в уравнение параболы $y = -2{,}5x^2 - 4$ значение $x = -3$, получим координаты точки D: $x = -3$; $y = -2{,}5 \times \times 9 - 4 = -26{,}5$.

Точки C и D находятся на одной прямой, параллельной оси y, по разные стороны от оси x. Следовательно, расстояние CD равно $32{,}5 + 26{,}5$, т. е. 59.

11. Если уравнение параболы имеет вид $y = a(x - m)^2 + n$, где $a > 0$, то областью значений функции y является промежуток $[n;\ +\infty)$.

По условию областью значений функции $y = 2(x - 3)^2 + (c^2 - 4c + 0{,}75)$ является промежуток $[-3;\ +\infty)$, следовательно, $c^2 - 4c + 0{,}75 = -3$. Решив уравнение $c^2 - 4c + 0{,}75 = -3$, получим, что $c_1 = 1{,}5;\ c_2 = 2{,}5$.

12. а) Решим уравнение $-(x - 2)^2 + 4 = -5$:

$$-(x - 2)^2 = -9;\ (x - 2)^2 = 9;\ x_1 = -1,\ x_2 = 5.$$

Координатами точек пересечения параболы $y = -(x - 2)^2 + 4$ и прямой $y = -5$ являются пары чисел $(-1;\ -5)$ и $(5;\ -5)$;

б) $-(x - 2)^2 + 4 = 8;\ -(x - 2)^2 = 4$. Не существует значений x, при которых это равенство верно. Следовательно, парабола $y = -(x - 2)^2 + 4$ не пересекается с прямой $y = 8$;

г) $-(x - 2)^2 + 4 = x;\ -x^2 + 3x = 0;\ x(x - 3) = 0;\ x_1 = 0,\ x_2 = 3$. Парабола $y = -(x - 2)^2 + 4$ пересекается с прямой $y = x$ в точках с координатами $(0;\ 0)$ и $(3;\ 3)$.

Пункт 7

7. Точка $N(-1;\ -10)$ является вершиной параболы $y = 2x^2 + b + c$, если $-1 = -\dfrac{b}{4}$ и $-10 = -\dfrac{b^2 - 8c}{8}$. Из первого уравнения находим, что $b = 4$, а из второго уравнения находим, что $c = -8$.

8. Так как ветви параболы $y = -2x^2 + x + c$ направлены вниз, то наибольшее значение функции y равно ординате вершины параболы $A(m;\ n)$. Имеем

$$n = -\frac{1 + 8c}{-8} = c + \frac{1}{8}.$$

По условию $n = 1$. Следовательно, $c + \dfrac{1}{8} = 1;\ \ c = \dfrac{7}{8}$.

9. а) Выделим полный квадрат из квадратного трёхчлена $2x^2 - 0{,}8x + 0{,}01$:

$$2x^2 - 0{,}8x + 0{,}01 = 2(x^2 - 0{,}4x + 0{,}04) - 0{,}08 + 0{,}01 =$$
$$= 2(x - 0{,}2)^2 - 0{,}07.$$

Областью значений функции $y = 2(x - 0{,}2)^2 - 0{,}07$ является промежуток $[-0{,}07;\ +\infty)$.

12. Запишем формулу, задающую квадратичную функцию: $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Вершиной параболы, являющейся её графиком, служит точка $B(-3;\ -20)$, следовательно, $-\dfrac{b}{2a} = -3;\ \ -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -20$.

Воспользовавшись тем условием, что парабола проходит через точку $N(5;\ 44)$, получим $25a + 5b + c = 44$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} b = 6a, \\ b^2 - 4ac = 80a, \\ 25a + 5b + c = 44. \end{cases}$$

Её решением служат значения $a = 1$; $b = 6$; $c = -11$.

Формула, задающая функцию, имеет вид $y = x^2 + 6x - 11$.

13. а) Ось симметрии графика функции $y = x^2 + 6x + 10$ задаётся уравнением $x = -\frac{6}{2}$, т. е. $x = -3$, а ось симметрии графика функции $y = x^2 - 6x + 11$ задаётся уравнением $x = -\frac{-6}{2}$, т. е. $x = 3$.

Эти оси являются параллельными прямыми, расстояние между которыми равно 6.

14. Найдём координаты вершины параболы $y = -x^2 + 6x - 5$:

$$m = -\frac{6}{-2}, \text{ т. е. } m = 3,$$

$$n = -9 + 18 - 5, \text{ т. е. } n = 4.$$

Вершиной параболы является точка (3; 4).

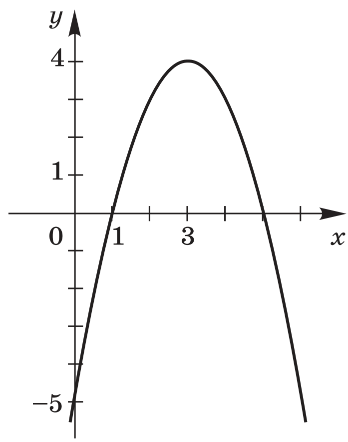

Рис. 10

При $x = 0$ $y = -5$; при $x = 6$ $y = -5$.

Следовательно, областью значений функции y, определённой на отрезке [0; 6], является отрезок [−5; 4].

Графическая иллюстрация дана на рисунке 10.

§ 4. Степенная функция. Корень n-й степени

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
8 9	Функция $y = x^n$ Корень n-й степени	3(4)
	Контрольная работа № 2	1

Содержание материала

К изучению пункта 8 «Функция $y = x^n$» учащиеся приступают, уже владея некоторым запасом сведений о функциях. Теперь они знакомятся с функцией нового вида — степенной функцией. Они узнают, что степенной функцией называется функция, задаваемая формулой вида $y = x^n$, где x — независимая переменная, n — натуральное число. Внимание учащихся обращается на то, что при чётном n свойства функции $y = x^n$ аналогичны свойствам функции $y = x^2$, а при нечётном n — свойствам функции $y = x^3$. Учащимся предлагаются несложные задания на вычисление и сравнение значений степенной функции $y = x^n$, схематическое изображение графиков некоторых степенных функций.

В пункте 9 «Корень n-й степени» учащиеся знакомятся с обозначением $\sqrt[n]{a}$. Они узнают, что при нечётном n выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любом значении a, а при чётном n это выражение имеет смысл лишь при $a \geqslant 0$.

Внимание учащихся обращается на то, что графиком функции $y = \sqrt[n]{x}$ при нечётном n является кривая, симметричная относительно начала координат и расположенная в первой и третьей координатных четвертях. Примером может служить график функции $y = \sqrt[3]{x}$, изображённый в учебнике на рисунке 45. При чётном n график функции $y = \sqrt[n]{x}$ представляет собой кривую, расположенную в первой координатной четверти.

При изучении пункта 9 расширяются представления учащихся о возможностях использования калькулятора при выполнении вычислений. Они узнают, каким образом с помощью калькулятора можно найти значение корня n-й степени при $n \geqslant 3$, используя клавиши $\boxed{y^x}$ и $\boxed{\frac{1}{x}}$.

Основная цель

Основная цель изучения материала параграфа 4 состоит в том, чтобы ознакомить учащихся со свойствами степенной функции $y = x^n$ с натуральным показателем n и сформировать начальные представления о корне n-й степени.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

В ходе изучения данного параграфа формируется умение учащихся изображать схематически графики функций вида $y = x^n$, где n — чётное или нечётное натуральное число, а также определять, принадлежит ли графику степенной функции точка с указанными координатами.

Учащиеся должны уметь решать графически простейшие уравнения вида $x^n = a$, где a — некоторое число, используя, в частности, помещённые в учебнике графики некоторых степенных функций. Они овладевают умением выполнять несложные задания на нахождение значений корней n-й степени, указывать два последовательных целых числа, между которыми заключено значение выражения вида $\sqrt[n]{a}$ при заданных значениях n и a, учатся находить в несложных случаях значение выражения $\sqrt[n]{a}$ с помощью калькулятора.

Методический комментарий

В параграфе 4 «Степенная функция. Корень n-й степени» расширяется запас сведений учащихся о функциях. В пункте 8 они знакомятся с функцией нового вида — степенной функцией. Сначала рассматриваются свойства функции $y = x^n$ с чётным показателем n. Усвоение этих свойств облегчается тем, что они аналогичны свойствам функции $y = x^2$. Учащиеся должны уметь обосновывать справедливость свойств 1—3 и проводить доказательство свойств 4 и 5. Следует обратить внимание учащихся на рисунок 38 учебника, где показано, как выглядит график функции $y = x^n$ при чётном n. Необходимо отметить, что график функции $y = x^4$ сходен с графиком функции $y = x^2$, однако около начала координат он поднимается вверх от оси x более плавно. Подобным образом строится также ознакомление учащихся со свойствами функции $y = x^n$ с нечётным показателем n, отличным от единицы. Эти свойства аналогичны свойствам функции $y = x^3$. Следует обратить внимание учащихся на приведённый в учебнике рисунок 40, где показано, как выглядит график функции $y = x^n$ при нечётном n, большем единицы. Изученные сведения о свойствах и графиках функций, заданных формулами вида $y = x^n$, где n — натуральное число, находят применение при выполнении учащимися упражнений **136—154**. Эти упражнения достаточно просты, однако важно добиваться, чтобы при их выполнении учащиеся не только давали верные ответы, но и приводили соответствующие обоснования.

В пункте 9 «Корень n-й степени» расширяется запас сведений учащихся о корнях. Впервые они встречаются с понятием «корень n-й степени», учатся находить значения некоторых выражений, содержащих корни n-й степени, например выражений вида $2\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$, $\sqrt[5]{-243}+1$ и т. п. Они должны уметь выяснять, имеет ли смысл выражение $\sqrt[10]{(-7)^4}$, указывать два последовательных целых числа, между которыми заключено число $\sqrt[3]{20}$ и т. п. Рекомендуется остановиться на упражнении **174**, в котором учащимся предлагается найти некоторые значения кубического корня, используя изображённый на рисунке в учебнике график функции $y=\sqrt[3]{x}$. Помещённые в учебнике сведения о нахождении с помощью калькулятора значений корня n-й степени из положительного числа способствуют повышению вычислительной культуры учащихся.

Из дополнительных упражнений к параграфу 4, помещённых в учебнике, рекомендуется использовать, при наличии времени, задания **251**, **253**, **256**, **262**.

Указания к основным упражнениям учебника

142. График функции $y=x^5$ проходит через точки $A(3;\ 243)$ и $C(5;\ 3125)$, так как $3^5=243$, $5^5=3125$.

Для точки $B(-3;\ 243)$ вычисления можно не проводить, так как при $x<0$ значение функции $y=x^5$ должно быть отрицательным. Точка B не принадлежит графику этой функции.

151. Упражнение позволяет показать учащимся, что функция $y=x^6$ не ограничена сверху.

153. Вычислим значения указанных разностей:

$$f(1)-f(0)=1-0=1,\ f(2)-f(1)=8-1=7,$$
$$f(3)-f(2)=27-8=19.$$

Эти разности показывают скорость роста функции (график функции с каждым шагом всё круче поднимается вверх).

154. Воспользуемся формулой $m=\rho V$, где ρ — плотность дерева, V — объём куба. Если $V=1000$, а $m=700$, то $\rho=0{,}7$. Формула имеет вид $m=0{,}7V$.

158. Чтобы показать, что число b является арифметическим корнем n-й степени из числа a, надо доказать выполнимость двух условий: 1) $b\geqslant 0$ и 2) $b^n=a$. Учащиеся должны усвоить, что если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то b не является арифметическим корнем n-й степени из a.

164. Графику функции $y=\sqrt[4]{x}$ принадлежат точки $E(81;\ 3)$, $F(81;\ -3)$ и $L(0{,}0001;\ 0{,}1)$, так как $3^4=81$, $(-3)^4=81$ и $0{,}1^4=0{,}0001$. Точка $K(-16;\ -2)$ не принадлежит графику функции $y=x^4$, так как $\sqrt[4]{-16}$ не существует.

166. г) $2<\sqrt[4]{52}<3$, так как $2^4=16$, $3^4=81$ и $16<52<81$.

167. Имеют смысл выражения

а) $\sqrt[3]{-8}$; г) $\sqrt[5]{(-3)^3}$; з) $\sqrt[11]{(-3)^4}$;

б) $\sqrt[7]{-0{,}28}$; е) $\sqrt[10]{(-7)^2}$; и) $\sqrt[12]{(-8)^4}$.

Выражения в) $\sqrt[4]{-5}$; д) $\sqrt[8]{(-2)^3}$; ж) $\sqrt[6]{(-5)^3}$ не имеют смысла, так как корень чётной степени из отрицательного числа не существует.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

249. Функция $y = x^n$ на множестве $[0; +\infty)$ является возрастающей, т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Этим объясняется справедливость всех указанных неравенств.

250. г) $\left(\frac{4}{9}\right)^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$, так как $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$;

е) $1250^3 < 36^6$, так как $36^6 = (36^2)^3 = 1296^3$.

251. б) $f(-30) - f(-20) = (-30)^7 - (-20)^7 = -30^7 + 20^7 < 0$;
в) $f(0) \cdot f(60) = 0$;
д) $g(-9) \cdot g(-17) = (-9)^{10} \cdot (-17)^{10} > 0$.

255. Полезно обсудить с учащимися, с помощью каких преобразований графики функций в заданиях «а»—«г» получаются из графика функции $y = x^3$, а графики функции в заданиях «д»—«з» — из графика функции $y = x^4$.

Например, график функции $y = (x - 3)^4 + 2$ получается из графика функции $y = x^4$ в результате параллельного переноса на 3 единицы вправо вдоль оси x и на 2 единицы вверх вдоль оси y.

257. а) $-0{,}5\sqrt[10]{1024} = -0{,}5 \cdot 2 = -1$;

б) $-\frac{2}{3}\sqrt[7]{-2187} = -\frac{2}{3} \cdot (-3) = 2$;

г) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} \cdot \sqrt{5\frac{4}{9}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} \cdot \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{3} = 3{,}5$;

е) $\sqrt[4]{16^{-2}} \cdot \sqrt[3]{0{,}125^3} = \sqrt[4]{4^{-4}} \cdot 0{,}125 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$.

259. При выполнении подобных упражнений следует учитывать, что при чётном n область определения функции $y = \sqrt[n]{f(x)}$ есть множество неотрицательных чисел, а при нечётном n — множество всех действительных чисел.

261. б) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}} - \sqrt[5]{\frac{1}{3}} > 0$, так как $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ и функция $y = \sqrt[5]{x}$ является возрастающей;

в) $1 - \sqrt[4]{0{,}99} > 0$, так как $1 = \sqrt[4]{1}$, $1 > 0{,}99$ и функция $y = \sqrt[4]{x}$ является возрастающей на множестве $[0; +\infty)$.

264. Функции $y=-\sqrt{x}$ и $y=\sqrt{-x}$ отличаются областью определения и областью значений. Областью определения функции $y=-\sqrt{x}$ является промежуток $[0; +\infty)$, а областью значений — промежуток $(-\infty; 0]$. График расположен в четвёртой координатной четверти.

Областью определения функции $y=\sqrt{-x}$ является промежуток $(-\infty; 0]$, а областью значений — промежуток $[0; +\infty)$. График расположен во второй координатной четверти.

Графики функций $y=\sqrt[3]{-x}$ и $y=-\sqrt[3]{x}$ совпадают, так как $\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 8

8. а) График функции $y=x^n$ проходит через точку $A(-5; -125)$ при $n=3$, так как $(-5)^3=-125$;

б) натурального числа n, при котором график функции $y=x^n$ проходит через точку $B(2{,}5; 7{,}5)$, не существует, так как $2{,}5^2=6{,}25$, а $2{,}5^3=15{,}625$;

в) график функции $y=x^n$ проходит через точку $C\left(\sqrt{2}; 64\right)$ при $n=12$, так как $\left(\sqrt{2}\right)^{12}=64$;

г) натурального значения n, при котором график функции $y=x^n$ проходит через точку $D(-4; 1024)$, не существует, так как равенство $(-4)^n=1024$ не является верным ни при каком натуральном n.

12. Схематически графики изображены на рисунке 11. Уравнение $x^7=4x$ имеет три корня, уравнение $x^6=4x$ имеет два корня, а уравнение $x^3=-x+1$ имеет один корень.

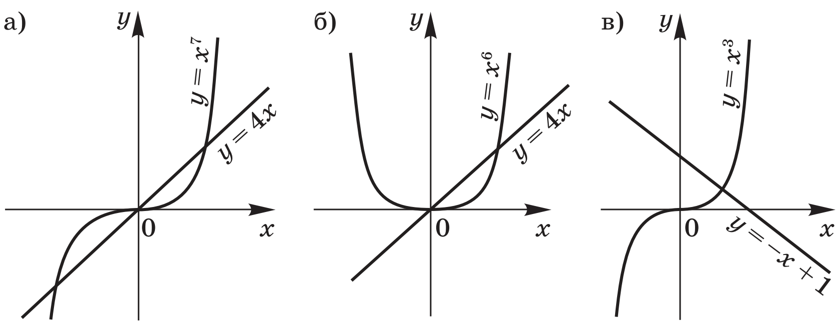

Рис. 11

П у н к т 9

8. в) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{625}}-3\sqrt[3]{-\dfrac{1}{125}}=\dfrac{3}{5}-3\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{5}=1{,}2;$

г) $\sqrt[4]{0{,}0001}-\sqrt{2\dfrac{14}{25}}+\sqrt[3]{-\dfrac{64}{125}}=0{,}1-\dfrac{8}{5}-\dfrac{4}{5}=0{,}1-1{,}6-0{,}8=$ $=-2{,}3.$

9. а) $x^8-2x^4=0;$
$x^4(x^4-2)=0;$
$x^4=0;\ x^4=2;$
$x_1=0,\ x_2=-\sqrt[4]{2},\ x_3=\sqrt[4]{2};$

г) $x^6+4x^3+3=0;$
$x^6+3x^3+x^3+3=0;$
$(x^3+1)(x^3+3)=0;$
$x_1=-1,\ x_2=\sqrt[3]{-3}.$

10. а) Воспользуемся тем, что при указанных значениях p верны равенства:

$\sqrt[6]{(p-2)^6}=|p-2|=p-2,$ так как $p\geqslant 2,$

$\sqrt[6]{(p-7)^6}=|p-7|=7-p,$ так как $p\leqslant 7,$

$\sqrt[6]{(p-1)^6}=|p-1|^6=p-1,$ так как $p\geqslant 2.$

Имеем $\sqrt[6]{(p-2)^6}+\sqrt[6]{(p-7)^6}-\sqrt[6]{(p-1)}=p-2+7-p-(p-1)=$ $=5-p+1=6-p.$

11. б) $\sqrt[6]{5{,}45}-\sqrt[6]{\dfrac{49}{9}}>0,$ так как $\dfrac{49}{9}=5{,}44\ldots<5{,}45$ и $\sqrt[6]{5{,}45}>\sqrt[6]{\dfrac{49}{9}},$ а функция $y=\sqrt[6]{x}$ при $x\geqslant 0$ является возрастающей;

г) $\dfrac{\sqrt[5]{6{,}73}-\sqrt[5]{6{,}23}}{1-\sqrt[5]{3}}<0,$ так как $\sqrt[5]{6{,}73}-\sqrt[5]{6{,}23}>0,$ а $1-\sqrt[5]{3}<0.$

Для тех, кто хочет знать больше

Пункт 10. Дробно-линейная функция и её график
Пункт 11. Степень с рациональным показателем

Методический комментарий

Главу I «Квадратичная функция» завершают два пункта, предназначенные для учащихся, интересующихся математикой. Пункт 10 «Дробно-линейная функция и её график» начинается с повторения известных учащимся сведений о свойствах и графике функции $y=\dfrac{k}{x}$. Учащиеся знакомятся с одним из важных математических понятий — понятием асимптоты. Они узнают, что при любом значении k, отличном от нуля, график функции $y=\frac{k}{x}$ имеет две асимптоты — ось x и ось y. Эти сведения являются опорными при рассмотрении графика дробно-линейной функции. Уже знакомая учащимся идея получения графика функции $y=f(x-m)+n$ из графика функции $y=f(x)$ с помощью параллельных переносов вдоль осей координат получает здесь дальнейшее развитие. Впервые учащиеся встречаются со случаем, когда речь идёт о двух параллельных переносах вдоль осей координат графика функции, состоящего из двух ветвей.

Подходы к построению графиков функций, заданных формулами вида $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, где x — переменная, a, b, c и d — некоторые числа, причём $c \neq 0$ и $ad-bc \neq 0$, проиллюстрированы в авторских примерах 1 и 2.

Ознакомление учащихся, интересующихся математикой, с материалом данного пункта можно провести в форме занятия математического кружка. Это занятие рекомендуется начать с вводной беседы, в которой учитель познакомит учащихся с понятиями «асимптота» и «дробно-линейная функция». Далее учащиеся могут заслушать выступления двух членов кружка, которые расскажут о приёмах построения графиков дробно-линейных функций, рассмотренных в авторских примерах 1 и 2. После этого учитель может предложить учащимся выполнить некоторые из упражнений, включённых в пункт 10.

В главе I представлен ещё один дополнительный пункт — «Степень с рациональным показателем». Некоторое представление о степени с дробным показателем учащиеся получили при ознакомлении с приёмом вычисления корней n-й степени с помощью калькулятора. Теперь эти сведения систематизируются и дополняются. Разъясняется, какой смысл имеет выражение $a^{\frac{m}{n}}$, где a — положительное число, $\frac{m}{n}$ — дробное число. Формируются свойства степеней с рациональными показателями и приводятся примеры применения этих свойств.

В пункт 11 включены некоторые упражнения на преобразование выражений, содержащих степени с рациональными показателями.

Материал данного пункта может быть рекомендован учащимся, интересующимся математикой, для самостоятельного изучения.

Указания к упражнениям учебника

181. а) График функции $y=\frac{4}{x-3}$ получается из графика функции $y=\frac{4}{x}$ в результате параллельного переноса на 3 единицы вправо вдоль оси x;

г) график функции $y=\frac{4}{x}-2$ получается из графика функции $y=\frac{4}{x}$ в результате параллельного переноса на 2 единицы вниз вдоль оси y.

182. а) Преобразуем формулу, задающую функцию:

$$\frac{x+8}{x-2}=\frac{x-2+10}{x-2}=1+\frac{10}{x-2}.$$

Асимптотами гиперболы $y=1+\frac{10}{x-2}$ являются прямые $x=2$ и $y=1$.

б) $-\frac{x-8}{x+3}=\frac{-x+8}{x+3}=\frac{-x-3+11}{x+3}=-1+\frac{11}{x+3}$.

Асимптотами гиперболы $y=-1+\frac{11}{x+3}$ являются прямые $x=-3$ и $y=-1$.

184. $\frac{3x-2}{x-2}=\frac{3x-6+4}{x-2}=3+\frac{4}{x-2}$.

График функции $y=\frac{3x-2}{x-2}$ получается из графика функции $y=\frac{4}{x}$ в результате параллельного переноса на 2 единицы вправо вдоль оси x и на 3 единицы вверх вдоль оси y.

$y=0$ при $x=\frac{2}{3}$; $y>0$, если числитель и знаменатель дроби $\frac{3x-2}{x-2}$ имеют одинаковые знаки, т. е. если $x>2$ или $x<\frac{2}{3}$; $y<0$, если $\frac{2}{3}<x<2$.

185. 1) $y=\frac{15}{x-3}$ — графиком этой функции является гипербола;

2) $y=\frac{8x-5}{25}=\frac{8}{25}x-\frac{1}{5}$ — графиком этой функции является прямая;

3) $\frac{37+x}{37-x}=-\frac{x+37}{x-37}=-\frac{x-37+74}{x-37}=-1-\frac{74}{x-37}$. Значит, графиком функции $y=\frac{37+x}{37-x}$ является гипербола;

4) $\frac{8x-40}{5x-25}=\frac{8(x-5)}{5(x-5)}=\frac{8}{5}$ $(x \neq 5)$. Таким образом, графиком функции $y=\frac{8x-40}{5x-25}$ является прямая $y=\frac{8}{5}$ с «выколотой» точкой $\left(5;\, \frac{8}{5}\right)$.

Итак, гиперболами являются графики функций 1 и 3.

186. Преобразуем формулу, задающую функцию:

$$\frac{2x+5}{x-3}=\frac{2x-6+11}{x-3}=2+\frac{11}{x-3}.$$

Значение этого выражения является натуральным числом, если $x-3=1$ или $x-3=11$, т. е. $x=4$ или $x=14$.

Таким образом, графику функции $y=\frac{2x+5}{x-3}$ принадлежат точки $A(4;\ 13)$ и $B\,(14;\ 3)$, координаты которых натуральные числа.

187. $y=\frac{8x-7}{x}$; $y=8-\frac{7}{x}$.

Значение этой функции является целым числом, если x принимает одно из следующих значений: 1; −1; 7; −7.

Графику функции принадлежат точки $A(1;\ 1)$, $B(-1;\ 15)$, $C(7;\ 7)$, $D(-7;\ 9)$, координаты которых целые числа.

189. График функции $y=\frac{6}{|x-2|}$ изображён на рисунке 12.

Решение каждого из уравнений получается с помощью графика: а) $x_1=0$, $x_2=4$; б) $x_1=1$; $x_2=3$; в) нет корней.

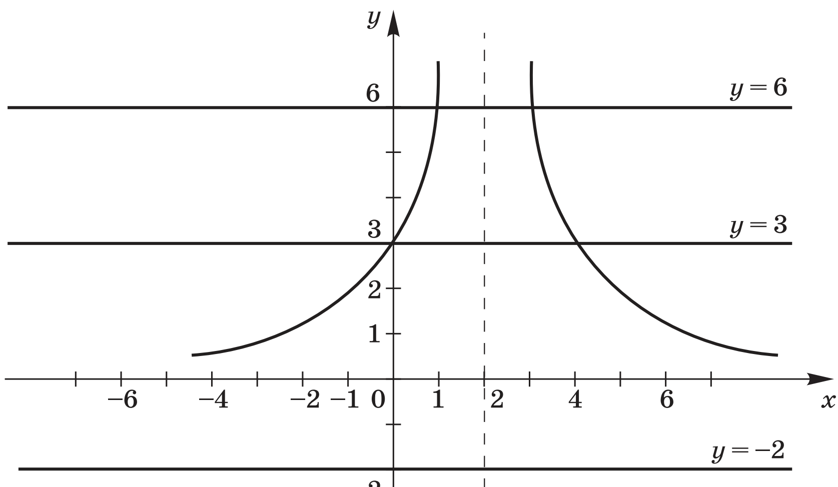

Рис. 12

190. б) $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$; $\quad a^{1,2} = a^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{a^6}$;

$b^{-0,8} = b^{-\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{b^4}}$; $\quad c^{2\frac{2}{3}} = c^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{c^8}$;

г) $(x-y)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x-y)^2}$; $\quad x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}$;

$3(a+b)^{\frac{3}{4}} = 3\sqrt[4]{(a+b)^3}$; $\quad 4a^{-\frac{2}{3}} + ax^{\frac{2}{3}} = \dfrac{4}{\sqrt[3]{a^2}} + a\sqrt[3]{x^2}$.

191. б) $\sqrt[3]{7^{-1}} = 7^{-\frac{1}{3}}$; $\qquad$ г) $\sqrt[5]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\frac{2}{5}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$;

е) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = x^{-\frac{3}{4}}$; $\qquad$ з) $\sqrt[5]{(x-y)^2} = (x-y)^{\frac{2}{5}}$.

192. г) $0{,}64^{-1,5} = (0{,}8^2)^{-1,5} = 0{,}8^{-3} = \dfrac{1}{0{,}512} = 1{,}953125$.

Можно сразу перейти к обыкновенным дробям:

$$0{,}64^{-1,5} = \left(\frac{16}{25}\right)^{-1,5} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2\cdot(-1,5)} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \frac{125}{64} = 1\frac{61}{64};$$

з) $7 \cdot 0{,}04^{-\frac{1}{2}} = 7 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{0{,}04}} = 7 \cdot \dfrac{1}{0{,}2} = 7 \cdot 5 = 35$.

194. а) $(a^{0,4})^{\frac{1}{2}} \cdot a^{0,8} = a^{0,2} \cdot a^{0,8} = a^{0,2+0,8} = a$;

б) $\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{5}} \cdot x^{1,6} = x^{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}} \cdot x^{1,6} = x^{0,6+1,6} = x^{2,2}$;

в) $a \cdot (a^{-1,2})^{\frac{3}{4}} = a \cdot a^{-\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{4}} = a \cdot a^{-\frac{9}{10}} = a^{1-\frac{9}{10}} = a^{0,1}$;

г) $(a^{0,8})^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(a^{-\frac{2}{5}}\right)^{-1,5} = a^{-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}} \cdot a^{-\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} = a^{-\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}} = a^{-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}} = a^0 = 1$.

195. а) $10^{\frac{2}{5}} \cdot 10^{-\frac{1}{2}} \cdot 10^{0,1} = 10^{\frac{2}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}} = 10^{\frac{4-5+1}{10}} = 10^0 = 1$;

б) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{9}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{3}} \cdot (2^3)^{-\frac{1}{9}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2+5-1}{3}} = 2^2 = 4$;

в) $3 \cdot 9^{0,4} \cdot \sqrt[5]{3} = 3 \cdot (3^2)^{0,4} \cdot 3^{\frac{1}{5}} = 3 \cdot 3^{0,8} \cdot 3^{0,2} = 3^{1+0,8+0,2} = 3^2 = 9$;

г) $8^{-\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot (2^4)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2^{-1} \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{-3+4+2}{3}} = 2^1 = 2$.

196. б) $y^6 = (y^2)^3$; $\quad y^7 = \left(y^{\frac{7}{3}}\right)^3$; $\quad y = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3$; $\quad y^{\frac{1}{2}} = \left(y^{\frac{1}{6}}\right)^3$; $\quad y^{-1,5} =$
$= (y^{-0,5})^3$; $\quad y^{0,2} = \left(y^{\frac{1}{15}}\right)^3$; $\quad y^{-\frac{2}{9}} = \left(y^{-\frac{2}{27}}\right)^3$.

197. а) $\dfrac{3+3^{\frac{1}{2}}}{3^{-\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{1}{2}}\left(3+3^{\frac{1}{2}}\right) = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 3;$

б) $\dfrac{10}{10-10^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{10\left(10+10^{\frac{1}{2}}\right)}{100-10} = \dfrac{10+10^{\frac{1}{2}}}{9};$

в) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}};$

г) $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}-5}{b-25} = \dfrac{b^{\frac{1}{2}}-5}{\left(b^{\frac{1}{2}}-5\right)\left(b^{\frac{1}{2}}+5\right)} = \dfrac{1}{b^{\frac{1}{2}}+5};$

д) $\dfrac{c+2c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}+d}{c-d} = \dfrac{\left(c^{\frac{1}{2}}+d^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(c^{\frac{1}{2}}-d^{\frac{1}{2}}\right)\left(c^{\frac{1}{2}}+d^{\frac{1}{2}}\right)} = \dfrac{c^{\frac{1}{2}}+d^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}-d^{\frac{1}{2}}};$

е) $\dfrac{m+n}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)\left(m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}\right)}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}} = m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}}.$

198. а) Так как $u = t^{\frac{2}{3}} + 1$, то $t^{\frac{2}{3}} = u - 1$; так как $v = t^{-\frac{2}{3}} + 1$, то $t^{-\frac{2}{3}} = v - 1$. Зная, что $t^{\frac{2}{3}} \cdot t^{-\frac{2}{3}} = 1$, получаем $(u-1)(v-1) = 1$;

б) так как $u = (t+2)^{\frac{1}{4}}$, то $u^4 = t + 2$; так как $v = (2-t)^{\frac{1}{4}}$, то $v^4 = 2 - t$. Складывая u^4 и v^4, получаем $u^4 + v^4 = 4$.

199. Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}+(a-b)^{\frac{1}{2}}}{(a+b)^{\frac{1}{2}}-(a-b)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a+\frac{4a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(a-\frac{4a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a+\frac{4a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(a-\frac{4a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\frac{9a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{9a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{3\cdot\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}}{3\cdot\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\cdot\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}}{2\cdot\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}} = 2.$$

ГЛАВА II

Уравнения и неравенства с одной переменной

§ 5. Уравнения с одной переменной

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
12	Целое уравнение и его корни	5 (6)
13	Дробные рациональные уравнения	3 (5)
	Контрольная работа № 3	1

Содержание материала

В данном параграфе систематизируются и расширяются известные учащимся сведения о целых и дробных уравнениях. В пункте 12 «Целое уравнение и его корни» напоминаются определения понятий целого уравнения с одной переменной, корня целого уравнения с одной переменной, степени целого уравнения с одной переменной, а также формулы корней уравнений первой и второй степени с одной переменной.

Учащиеся знакомятся с такими приёмами решения уравнений третьей и более высоких степеней, как использование разложения многочленов на множители и введение новой переменной. Вводится понятие «биквадратное уравнение» и рассматривается способ решения биквадратных уравнений.

Завершает данный параграф пункт 13 «Дробные рациональные уравнения». С простейшими случаями, когда решение дробного рационального уравнения сводилось к решению целого уравнения первой или второй степени с последующим исключением посторонних корней, учащиеся уже встречались в курсе алгебры 8 класса. Теперь круг дробных рациональных уравнений, предлагаемых учащимся, существенным образом расширен. В их число включены достаточно сложные дробные рациональные уравнения, решение которых связано с решением целых уравнений высших степеней и последующим исключением посторонних корней, если они имеются, а также с применением каких-либо искусственных приёмов.

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы сформировать умение учащихся решать целые уравнения высших степеней, используя разложение многочленов на множители и введение новой переменной, а также ознакомить учащихся с некоторыми приёмами решения дробных рациональных уравнений.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

В ходе изучения данного параграфа учащиеся овладевают умением решать уравнения вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен третьей или более высокой степени, используя разложение многочлена $P(x)$ на множители и опираясь на условие равенства нулю произведения. Девятиклассники учатся также применять метод введения новой переменной для решения некоторых целых уравнений, в частности биквадратных уравнений.

Изучение данного параграфа завершается ознакомлением учащихся с приёмами решения дробных рациональных уравнений. Учащиеся встречаются со случаями, когда решение дробных рациональных уравнений сводится к решению целых уравнений высших степеней с последующим исключением посторонних корней.

Методический комментарий

Учащиеся хорошо знакомы со способами решения уравнений первой и второй степени. Эти способы находят применение при выполнении упражнений **266** и **267**. В пункте 12 учащиеся получают представление о способах решения некоторых целых уравнений с одной переменной, степень которых выше двух. На примере уравнения $x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0$ им разъясняется, что уравнение третьей или более высокой степени иногда удаётся решить, используя разложение многочлена на множители. Этот способ учащиеся применяют при выполнении упражнений **272—275**. Особое внимание следует уделить упражнениям **274** и **275**, в которых учащимся достаточно сложно найти необходимый способ разложения многочлена на множители.

Ещё одним важным способом решения уравнений третьей и более высоких степеней, с которым знакомятся девятиклассники, является введение новой переменной. Этот способ разъясняется в авторском примере 2 и находит применение в упражнениях **276**, **277**. Учащиеся впервые встречаются с понятием биквадратного уравнения, узнают о приёме решения биквадратных уравнений, показанном в авторском примере 3, и выполняют упражнения **278—281**, при решении которых этот приём находит применение. При наличии времени полезно использовать дополнительные упражнения **361—363**, связанные с понятием биквадратного уравнения. Специальное внимание рекомендуется уделить заданиям **282—284**, в которых изученные приёмы решения целых уравнений используются в усложнённых ситуациях.

В связи с рассмотрением приёмов решения целых уравнений с одной переменной полезно рассказать учащимся, что для уравнений третьей и четвёртой степеней выведены формулы корней, но эти формулы излишне громоздки и не используются на практике. Для уравнений пятой и более высоких степеней общих формул корней, как доказал норвежский математик Н. Абель (1802—1829), не существует.

Рекомендуется предложить учащимся выполнить некоторые задания из числа дополнительных упражнений к параграфу 5. Упражнения **352—360** позволяют учащимся ещё раз вернуться к таким способам решения целых уравнений, как использование разложения многочленов на множители и введение новой переменной.

Изучение параграфа 5 «Уравнения с одной переменной» завершается ознакомлением учащихся с некоторыми приёмами решения дробных рациональных уравнений. С простейшими случаями, когда решение дробного рационального уравнения сводится к решению целого уравнения первой или второй степени с последующим исключением посторонних корней, учащиеся уже встречались в курсе алгебры 8 класса. Теперь им предлагаются более сложные дробные рациональные уравнения, решение которых сводится к решению целых уравнений третьей или более высокой степени и последующему выявлению посторонних корней, если они встретятся среди найденных корней целого уравнения. Рекомендуется специально остановиться на заданиях **294** и **297**, предназначенных для работы в парах. Здесь учащиеся должны выбрать рациональный способ решения и проверить друг у друга, правильно ли это решение выполнено.

Особое внимание следует уделить упражнению **299**, где представлена задача-исследование, решение которой требует достаточно серьёзного и обстоятельного анализа поставленной проблемы. Учащиеся коллективно намечают путь решения задачи, составляют и решают уравнение, выбирают те из его корней, которые соответствуют условию задачи.

При наличии времени можно предложить учащимся выполнить дополнительные упражнения **371—375**, где представлены достаточно сложные дробные рациональные уравнения, при решении которых используется введение новой переменной.

Указания к основным упражнениям учебника

268. При любом значении x сумма $5x^6 + 6x^4 + x^2 \geqslant 0$, следовательно, $5x^6 + 6x^4 + x^2 + 4 > 0$. Значит, заданное уравнение не имеет корней.

269. Если $x < 0$, то $12x^5 + 7x^3 + 11x - 3 < 0$.

Следовательно, отрицательное число не может быть корнем заданного уравнения.

270. Пусть ребро куба равно x см, тогда его объём равен x^3 см^3. Имеем уравнение

$$(x+3)^3 = x^3 + 513; \quad x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = x^3 + 513;$$
$$x^2 + 3x - 54 = 0; \quad x_1 = -9, \ x_2 = 6.$$

Следовательно, ребро куба равно 6 см.

271. Обозначим первое число через x, тогда второе число равно $(x - 5)$. Имеем уравнение

$$x^3 = (x-5)^3 + 3185; \quad x^3 = x^3 - 15x^2 + 75x - 125 + 3185;$$
$$15x^2 - 75x - 3060 = 0; \quad x^2 - 5x - 204 = 0; \quad x_1 = -12, \ x_2 = 17.$$

Задача имеет два решения: искомые числа -12 и -17 или 17 и 12.

272. з) $x^4 - x^2 = 3x^3 - 3x; \quad x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x = 0;$

$x^3(x-3) - x(x-3) = 0; \quad (x-3)(x^3 - x) = 0;$

$x(x-1)(x+1)(x-3) = 0.$

Корни уравнения: -1; 0; 1; 3.

274. а) $x^3 + 7x^2 - 6 = 0; \quad x^3 + x^2 + 6x^2 - 6 = 0;$

$x^2(x+1) + 6(x^2 - 1) = 0; \quad x^2(x+1) + 6(x-1)(x+1) = 0;$

$(x+1)(x^2 + 6x - 6) = 0; \quad x + 1 = 0$ или $x^2 + 6x - 6 = 0;$

$x_1 = -1, \ x_2 = -3 - \sqrt{15}, \ x_3 = -3 + \sqrt{15}.$

275. Если $x = 0$, то $y = -6$, следовательно, график функции $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ пересекает ось y в точке $(0; -6)$.

Чтобы найти координаты точек пересечения графика этой функции с осью x, решим уравнение

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0; \quad x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = 0;$

$x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) = 0; \quad (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0;$

$x_1 = 1, \ x_2 = 2, \ x_3 = 3.$

График функции пересекает ось x в точках $(1; 0)$, $(2; 0)$ и $(3; 0)$.

276. г) $(2x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 4) + 2 = 0.$

Введём новую переменную $y = 2x^2 + x$.

Уравнение примет вид $(y-1)(y-4) + 2 = 0$.

Корни этого уравнения: $y_1 = 2$; $y_2 = 3$.

Решив уравнения $2x^2 + x = 2$ и $2x^2 + x = 3$, найдём, что первое уравнение имеет корни $-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}$ и $-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$, а второе уравнение имеет корни $-1{,}5$ и 1.

Следовательно, данное уравнение имеет четыре корня: $-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}$; $-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}$; $-1{,}5$ и 1.

277. в) $(x^2+x)(x^2+x-5)=84$.

Введём новую переменную $y=x^2+x$. Имеем

$y(y-5)=84;\quad y^2-5y-84=0;\quad y_1=-7,\ y_2=12.$

Решив уравнения $x^2+x=-7$ и $x^2+x=12$, найдём, что первое уравнение корней не имеет, а второе уравнение имеет корни -4 и 3.

Следовательно, исходное уравнение имеет два корня: -4 и 3.

278. д) $9x^4-9x^2+2=0;\quad y=x^2;$

$9y^2-9y+2=0;\quad y_1=\frac{1}{3};\ y_2=\frac{2}{3};$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}};\ x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}};$

е) $16y^4-8y^2+1=0;\quad z=y^2;$

$16z^2-8z+1=0;\quad (4z-1)^2=0;\quad z=\frac{1}{4};$

$y_1=-\frac{1}{2};\ \ y_2=\frac{1}{2}.$

281. а) Решим уравнение $x^4-47x^2-98=0;$

$y=x^2;\quad y^2-47y-98=0;\quad y_1=-2;\ y_2=49.$

Значит, $y^2-47y-98=(y+2)(y-49)$.

Следовательно,

$$x^4-47x^2-98=(x^2+2)(x^2-49)=(x^2+2)(x-7)(x+7).$$

Можно применить другой способ разложения данного квадратного трёхчлена на множители:

$$x^4-47x^2-98=x^4-49x^2+2x^2-98=x^2(x^2-49)+2(x^2-49)=$$
$$=(x^2-49)(x^2+2)=(x-7)(x+7)(x^2+2);$$

б) представим $85x^2$ в виде суммы $84x^2+x^2$. Получим

$$x^4-85x^2+1764=x^4-84x^2+1764-x^2=(x^2-42)^2-x^2=$$
$$=(x^2-x-42)(x^2+x-42)=(x-7)(x+6)(x+7)(x-6).$$

282. а) $(x^2-1)(x^2+1)-4(x^2-11)=0;$

$x^4-4x^2+43=0;\quad x^2=y;\quad y^2-4y+43=0.$

Это уравнение не имеет корней, так как $D=16-172<0;$

б) $3x^2(x-1)(x+1)-10x^2+4=0;\quad 3x^2(x^2-1)-10x^2+4=0;$

$3x^4-13x^2+4=0;\quad x^2=y;\quad 3y^2-13y+4=0;\quad y_1=\frac{1}{3};\ y_2=4;$

$x_1=-\sqrt{\frac{1}{3}};\ \ x_1=\sqrt{\frac{1}{3}};\ \ x_3=-2;\ x_4=2.$

283. а) Разложим многочлен, стоящий в левой части уравнения, на множители:

$$x^5 + x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 5x + 5 = x^4(x + 1) - 6x^2(x + 1) + 5(x + 1) = \\ = (x + 1)(x^4 - 6x^2 + 5).$$

Уравнение примет вид $(x + 1)(x^4 - 6x^2 + 5) = 0$;

$$x + 1 = 0 \text{ или } x^4 - 6x^2 + 5 = 0.$$

Решим биквадратное уравнение $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$:

$x^2 = y$; $y^2 - 6y + 5 = 0$; $y_1 = 1$; $y_2 = 5$;

$x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -\sqrt{5}$; $x_4 = \sqrt{5}$.

Корень x_1 совпадает с корнем уравнения $x + 1 = 0$. Следовательно, исходное уравнение имеет четыре корня: $-\sqrt{5}$, -1, 1, $\sqrt{5}$;

б) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3 = x^4(x - 1) - 2x^2(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x^4 - 2x^2 - 3)$.

Отсюда $x - 1 = 0$ или $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.

Корень первого уравнения $x_1 = 1$.

Решим второе уравнение:

$$y = x^2; \quad y^2 - 2y - 3 = 0; \quad y_1 = 3; \ y_2 = -1; \ x_2 = -\sqrt{3}; \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

Исходное уравнение имеет три корня: $-\sqrt{3}$, 1, $\sqrt{3}$.

284. а) $y^7 - y^6 + 8y = 8$;

$y^6(y - 1) + 8(y - 1) = 0$; $(y - 1)(y^6 + 8) = 0$.

$y^6 + 8 > 0$ при любом значении y, значит, исходное уравнение имеет единственный корень: $y = 1$;

б) $u^7 - u^6 = 64u - 64$; $u^6(u - 1) - 64(u - 1) = 0$;

$(u - 1)(u^3 - 8)(u^3 + 8) = 0$.

Из уравнений $u - 1 = 0$, $u^3 - 8 = 0$ и $u^3 + 8 = 0$ получаем, что $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = -2$.

288. б) $\dfrac{a^5 + 2a^4}{a^3 + a + 10} = 0$; $a^5 + 2a^4 = 0$; $a^4(a + 2) = 0$;

$a_1 = 0$; $a_2 = -2$.

Если $a = 0$, то $a^3 + a + 10 \neq 0$;

если $a = -2$, то $a^3 + a + 10 = -8 - 2 + 10 = 0$.

Следовательно, $a = -2$ не является корнем исходного уравнения. Уравнение имеет единственный корень: $a = 0$.

289. а) $\dfrac{5y^3 - 15y^2 - 2y + 6}{y^2 - 9} = 0$;

$5y^3 - 15y^2 - 2y + 6 = 0$; $5y^2(y - 3) - 2(y - 3) = 0$;

$(y - 3)(5y^2 - 2) = 0$;

$y - 3 = 0$ или $5y^2 - 2 = 0$.

Если $y-3=0$, то $y=3$. Значение y, равное 3, не является корнем исходного уравнения, так как обращает в нуль знаменатель дроби.

Если $5y^2-2=0$, то $y^2=\frac{2}{5}$; $y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$. Следовательно, исходное уравнение имеет два корня: $-\sqrt{0,4}$ и $\sqrt{0,4}$.

290. а) $\frac{2}{x-2}-\frac{10}{x+3}=\frac{50}{x^2+x-6}-1;$

$26-8x=50-x^2-x+6;$

$x^2-7x-30=0;\quad x_1=-3;\ x_2=10.$

Если $x=-3$, то общий знаменатель дробей x^2+x-6 равен нулю, следовательно, значение x, равное -3, не является корнем исходного уравнения.

Если $x=10$, то $x^2+x-6=100+10-6\neq 0$.

Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень, равный 10.

291. б) $\frac{5x-1}{x+7}-\frac{2x+2}{x-3}+\frac{63}{x^2+4x-21}=0;$

$(5x-1)(x-3)-(2x+2)(x+7)+63=0;$

$3x^2-32x+52=0;\quad x_1=2;\ x_2=8\frac{2}{3}.$

Если $x=2$, то $x^2+4x-21=4+8-21=-9\neq 0;$

если $x=8\frac{2}{3}$, то $x^2+4x-21\neq 0$.

Следовательно, исходное уравнение имеет два корня: 2 и $8\frac{2}{3}$.

292. а) Задание сводится к решению уравнения

$$\frac{a+1}{a-2}+\frac{a-4}{a+1}=\frac{3a+3}{a^2-a-2}.$$

Имеем

$$(a+1)^2+(a-4)(a-2)-(3a+3)=0;\quad 2a^2-7a+6=0;$$

$$a_1=\frac{3}{2};\ a_2=2.$$

Если $a=\frac{3}{2}$, то $a^2-a-2\neq 0$; если $a=2$, то $a^2-a-2=0$.

Следовательно, значения данных дробей равны при $a=1,5$.

293. а) $\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x-9};$

$\frac{x-1-x+7}{x^2-8x+7}=\frac{x-9-x+10}{x^2-19x+90};\ 6(x^2-19x+90)=x^2-8x+7;$

$5x^2-106x+533=0;\quad x_1=8,2;\ x_2=13.$

При этих значениях знаменатели дробей не обращаются в нуль. Следовательно, заданное уравнение имеет два корня: 8,2 и 13.

294. (*Для работы в парах.*) а) Уравнение удобно представить в виде

$$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-2}.$$

Тогда

$$\frac{x+4-x+4}{x^2-16}=\frac{x-2-x+5}{x^2-7x+10};\quad 8(x^2-7x+10)=3(x^2-16);$$

$$5x^2-56x+128=0;\quad x_1=3{,}2;\ x_2=8.$$

При этих значениях знаменатели дробей исходного уравнения не обращаются в нуль. Следовательно, исходное уравнение имеет два корня: 3,2 и 8;

б) уравнение удобно представить в виде

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+28}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}.$$

Тогда

$$\frac{27}{(x+1)(x+28)}=\frac{3}{x(x+3)};\quad 9x(x+3)=(x+1)(x+28);$$

$$8x^2-2x-28=0;\quad 4x^2-x-14=0;\quad x_1=-\frac{7}{4};\ x_2=2.$$

При этих значениях x знаменатели дробей не равны нулю. Следовательно, исходное уравнение имеет два корня: $-\frac{7}{4}$ и 2.

295. б) Задача сводится к решению уравнения

$$x^2+6x-4=\frac{24}{x};\quad x^3+6x^2-4x-24=0;$$

$$(x^2-4)(x+6)=0;\quad (x-2)(x+2)(x+6)=0;$$

$$x_1=2,\ x_2=-2,\ x_3=-6.$$

Ни одно из этих значений не обращает в нуль знаменатель дроби $\frac{24}{x}$. Следовательно, графики функций $y=x^2+6x-4$ и $y=\frac{24}{x}$ пересекаются в трёх точках: (2; 12), (−2; −12) и (−6; −4).

296. б) Из уравнения $\frac{2-18a^2-a}{3a}=-3a^2$ находим, что

$$2-18a^2-a+9a^3=0;\quad (2-a)(1-9a^2)=0;$$

$$(2-a)(1-3a)(1+3a)=0;\ a_1=2,\ a_2=\frac{1}{3},\ a_3=-\frac{1}{3}.$$

Ни одно из этих значений не обращает в нуль знаменатель дроби. Следовательно, значения исходных выражений являются противоположными числами при значениях a, равных 2, $\frac{1}{3}$ или $-\frac{1}{3}$.

297. (*Для работы в парах.*) а) Введём новую переменную $y = x^2 - 2x$. Тогда уравнение примет вид $\frac{12}{y+3} = y - 1$. Имеем

$$y^2 + 2y - 15 = 0; \quad y_1 = -5; \; y_2 = 3.$$

Отсюда $x^2 - 2x = -5$ или $x^2 - 2x = 3$.

Первое уравнение корней не имеет. Решая второе уравнение, получаем $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

Если $x = -1$, то $x^2 - 2x + 3 = 1 + 2 + 3 \neq 0$; если $x = 3$, то $x^2 - 2x + 3 = 9 - 6 + 3 \neq 0$.

Следовательно, данное уравнение имеет два корня: -1 и 3;

б) введём новую переменную $y = x^2 + x$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{12}{y-10} - \frac{6}{y-6} = \frac{5}{y-11}.$$

Имеем

$$\frac{12y - 72 - 6y + 60}{y^2 - 16y + 60} = \frac{5}{y-11};$$

$$(6y - 12)(y - 11) = 5(y^2 - 16y + 60);$$

$$y^2 + 2y - 168 = 0; \quad y_1 = -14; \; y_2 = 12.$$

Отсюда $x^2 + x = -14$ или $x^2 + x = 12$.

Первое уравнение корней не имеет; второе уравнение имеет корни $x_1 = -4$; $x_2 = 3$. При этих значениях ни один из знаменателей дробей в исходном уравнении не обращается в нуль.

Следовательно, данное уравнение имеет два корня: -4 и 3;

в) введём новую переменную $y = x^2 - 2x$, тогда уравнение примет вид

$$\frac{16}{y} - \frac{11}{y+3} = \frac{9}{y+1}.$$

Имеем

$$(16y + 48 - 11y)(y + 1) = 9y(y + 3);$$

$$5y^2 + 53y + 48 - 9y^2 - 27y = 0;$$

$$2y^2 - 13y - 24 = 0; \quad y_1 = -1{,}5; \; y_2 = 8.$$

Отсюда $x^2 - 2x = -1{,}5$ или $x^2 - 2x = 8$.

Первое уравнение корней не имеет; второе уравнение имеет корни $x_1 = -2$; $x_2 = 4$. При этих значениях ни один из знаменателей дробей в исходном уравнении не обращается в нуль.

Следовательно, данное уравнение имеет два корня: −2 и 4.

298. а) Обозначим дробь $\frac{x+2}{x-4}$ через y. Тогда уравнение примет вид

$$y^2 + \frac{16}{y^2} = 17.$$

Отсюда $y^4 - 17y^2 + 16 = 0$. Это биквадратное уравнение имеет корни $y_1 = -1$; $y_2 = 1$; $y_3 = -4$; $y_4 = 4$.

Следовательно,

$$\frac{x+2}{x-4} = -1, \text{ или } \frac{x+2}{x-4} = 1, \text{ или } \frac{x+2}{x-4} = -4, \text{ или } \frac{x+2}{x-4} = 4.$$

Решив эти уравнения, получим $x_1 = 1$; $x_2 = 2{,}8$; $x_3 = 6$.

299. (*Задача-исследование.*) Обозначим искомое число через x $(x > 0)$. Составим уравнение: $13\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$. Введём новую переменную $z = x + \frac{1}{x}$. Тогда

$$z^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Отсюда $x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z$. Имеем

$$13z = z^3 - 3z; \quad z^3 - 16z = 0; \quad z(z-4)(z+4) = 0;$$
$$z_1 = 0; \; z_2 = 4; \; z_3 = -4.$$

Значения x найдём из уравнений:

$$x + \frac{1}{x} = 0; \quad x + \frac{1}{x} = 4; \quad x + \frac{1}{x} = -4.$$

Первое уравнение корней не имеет. Решив второе уравнение, получим $x_1 = 2 - \sqrt{3}$; $x_2 = 2 + \sqrt{3}$. Решив третье уравнение, получим $x_3 = -2 - \sqrt{3}$; $x_4 = -2 + \sqrt{3}$.

Значения $x_3 = -2 - \sqrt{3}$ и $x_4 = -2 + \sqrt{3}$ не удовлетворяют условию задачи, так как они не являются положительными числами. Следовательно, задача имеет два решения: $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$.

300. а) $x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)=3\frac{1}{2}$.

Введём новую переменную $y=x-\frac{1}{x}$. Тогда

$$y^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}.$$

Отсюда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$. Имеем

$$y^2+2-\frac{1}{2}y=\frac{7}{2};\quad 2y^2-y-3=0;\quad y_1=-1;\ y_2=\frac{3}{2}.$$

Значения x найдём из уравнений $x-\frac{1}{x}=-1$ и $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$.

Корни первого уравнения $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; корни второго уравнения $-\frac{1}{2}$ и 2. Следовательно, исходное уравнение имеет четыре корня: $-\frac{1}{2}$; 2; $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

353. б) Преобразуем исходное уравнение, применив дважды формулу разности квадратов:

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)=6x^2-1;\quad x^4-1=6x^2-1;$$
$$x^4=6x^2;\quad x^2(x^2-6)=0;\quad x_1=0;\ x_2=-\sqrt{6};\ x_3=\sqrt{6}.$$

355. а) Представив $4x^2$ как x^2+3x^2, а $-3x$ как $-6x+3x$, получим

$$x^2(x+1)+3x(x+1)-6(x+1)=0;\quad (x+1)(x^2+3x-6)=0.$$

Отсюда $x+1=0$ или $x^2+3x-6=0$.

Решив эти уравнения, найдём, что

$$x_1=-1;\ x_2=\frac{-3-\sqrt{33}}{2};\ x_3=\frac{-3+\sqrt{33}}{2}.$$

356. а) При решении уравнения графическим способом надо найти абсциссы точек пересечения кубической параболы $y=x^3$ и прямой $y=x$.

При решении уравнения $x^3=x$ аналитическим способом получим

$$x^3-x=0;\quad x(x-1)(x+1)=0;\quad x_1=0;\ x_2=-1;\ x_3=1.$$

357. Представим уравнение в виде $x^3=-ax-b$. Если $a\geqslant 0$, то кубическая парабола $y=x^3$ и прямая $y=-ax-b$ пересекаются в единственной точке при любом значении b. Следовательно, в этом случае уравнение $x^3+ax+b=0$

имеет единственное решение. Если $a < 0$, то кубическая парабола $y = x^3$ и прямая $y = -ax - b$ пересекаются в единственной точке при любом значении b, отличном от нуля. Если же $a < 0$, а $b = 0$, то прямая пересекает кубическую параболу в трёх точках. Следовательно, при $a < 0$ уравнение $x^3 + ax + b = 0$ имеет единственное решение, если $b \neq 0$, и три решения, если $b = 0$.

Различные случаи взаимного расположения кубической параболы $y = x^3$ и прямой $y = -ax - b$ изображены схематически на рисунке 13.

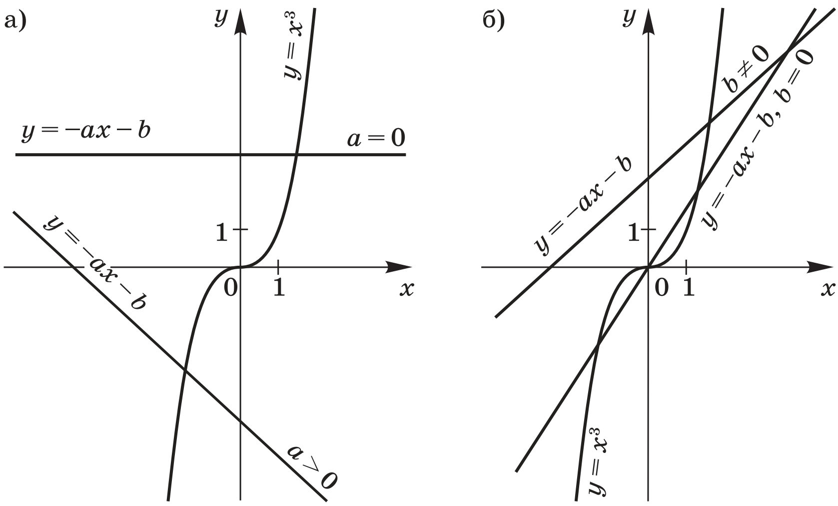

Рис. 13

358. ж) $(2x^2 + 7x - 8)(2x^2 + 7x - 3) - 6 = 0$.
Введём новую переменную $y = 2x^2 + 7x$. Получим
$(y - 8)(y - 3) - 6 = 0$; $y^2 - 11y + 18 = 0$; $y_1 = 2$; $y_2 = 9$.
Отсюда $2x^2 + 7x = 2$ или $2x^2 + 7x = 9$.

Первое уравнение имеет корни $x_1 = \frac{-7 - \sqrt{65}}{4}$; $x_2 = \frac{-7 + \sqrt{65}}{4}$.

Второе уравнение имеет корни $x_3 = -4{,}5$; $x_4 = 1$.

361. Решив заданные биквадратные уравнения, учащиеся убеждаются в том, что сумма корней каждого из этих уравнений равна нулю. Полезно предложить учащимся доказать справедливость этого факта в общем виде.

362. а) Воспользуемся равенствами

$$\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}}\right)^2 = 3 + \sqrt{5}; \quad \left(\sqrt{3 + \sqrt{5}}\right)^4 = (3 + \sqrt{5})^2 = 14 + 6\sqrt{5}.$$

Получим

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^4-6\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2+3=$$

$$=14+6\sqrt{5}-6(3+\sqrt{5})+3=14+6\sqrt{5}-18-6\sqrt{5}+3\neq 0.$$

Значит, число $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ не является корнем данного биквадратного уравнения.

363. а) $x^4-20x^2+64=x^4-4x^2-16x^2+64=x^2(x^2-4)-16(x^2-4)=(x^2-4)(x^2-16)=(x-2)(x+2)(x-4)(x+4)$;

в) $x^4-5x^2-36=x^4-9x^2+4x^2-36=x^2(x^2-9)+4(x^2-9)=(x^2-9)(x^2+4)=(x-3)(x+3)(x^2+4)$;

д) $9x^4-10x^2+1=9x^4-9x^2-x^2+1=9x^2(x^2-1)-(x^2-1)=(x^2-1)(9x^2-1)=(x-1)(x+1)(3x-1)(3x+1)$.

365. Составим и решим уравнение:

$$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+20};$$

$$\frac{x+4-x-2}{x^2+6x+8}=\frac{x+20-x-8}{x^2+28x+160};$$

$$2(x^2+28x+160)=12(x^2+6x+8);$$

$$5x^2+8x-112=0;\quad x_1=-5{,}6;\ x_2=4.$$

Ни один из этих корней не обращает в нуль знаменатели дробей исходного уравнения.

366. а) Воспользовавшись тем, что

$$\frac{x^2-5x+3}{x-5}=x+\frac{3}{x-5},\ \text{ а }\ \frac{x^2+5x+1}{x+5}=x+\frac{1}{x+5},$$

получим уравнение

$$x+\frac{3}{x-5}-x-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{4}.$$

Имеем

$$12(x+5)-4(x-5)=x^2-25;\quad x^2-8x-105=0;$$

$$x_1=-7;\ x_2=15;$$

б) воспользовавшись тем, что

$$\frac{x^2+6x+10}{x+3}=x+\frac{3x+10}{x+3},\ \text{ а }\ \frac{x^2-6x+7}{x-3}=x-\frac{3x-7}{x-3},$$

получим уравнение

$$x+\frac{3x+10}{x+3}-x+\frac{3x-7}{x-3}=\frac{57}{8}.$$

Имеем

$$8(3x+10)(x-3)+8(3x-7)(x+3)=57(x^2-9);$$

$$3x^2-8x-35=0; \quad x_1=-2\frac{1}{3}; \; x_2=5.$$

367. б) $\dfrac{3}{x^2-x-6}+\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{7}{x^2-9};$

$\dfrac{3}{(x+2)(x-3)}+\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{7}{(x-3)(x+3)};$

$3(x+3)+3(x^2-9)=7(x+2);$

$3x^2-4x-32=0; \quad x_1=-2\frac{2}{3}; \quad x_2=4.$

Ни один из корней не обращает в нуль знаменатели дробей исходного уравнения.

368. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{1}{x^3-x^2+x-1}+\frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}=\frac{1}{x^2(x-1)+(x-1)}+\frac{4x^2+21}{x^2(x+1)+(x+1)}=$$

$$=\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}+\frac{4x^2+21}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{x+1+(4x^2+21)(x-1)}{x^4-1}=\frac{4x^3-4x^2+22x-20}{x^4-1}.$$

Имеем

$$\frac{4x^3-4x^2+22x-20}{x^4-1}=\frac{4x^3-3x^2+14x-4}{x^4-1};$$

$$-4x^2+22x-20=-3x^2+14x-4;$$

$$x^2-8x+16=0; \quad (x-4)^2=0; \quad x=4.$$

369. а) $x^2=\dfrac{7x-4}{4x-7}; \quad 4x^3-7x^2-7x+4=0;$

$4(x^3+1)-7x(x+1)=0; \quad (x+1)(4x^2-4x+4-7x)=0;$

$(x+1)(4x^2-11x+4)=0;$

$x_1=-1; \;\; x_2=\dfrac{11-\sqrt{57}}{8}; \;\; x_3=\dfrac{11+\sqrt{57}}{8}.$

372. б) Введём переменную $y=\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^2$, тогда $\left(\dfrac{x-5}{x+3}\right)^2=\dfrac{1}{y}.$

Уравнение примет вид $y-\dfrac{9}{y}=8.$ Его корни $y_1=-1$, $y_2=9.$

Уравнение $\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^2=-1$ корней не имеет. Из уравнения $\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^2=9$ получаем $\dfrac{x+3}{x-5}=3$ или $\dfrac{x+3}{x-5}=-3.$

Корень первого уравнения $x_1=9$, корень второго $x_2=3.$

373. а) Обозначим $x+\frac{1}{x}=y$, тогда

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2, \quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Уравнение примет вид $2(y^2-2)-y=2$. Его корни $y_1=-\frac{3}{2}$; $y_2=2$.

Следовательно, $x+\frac{1}{x}=-\frac{3}{2}$ или $x+\frac{1}{x}=2$.

Уравнение $x+\frac{1}{x}=-\frac{3}{x}$ корней не имеет. Уравнение $x+\frac{1}{x}=2$ имеет единственный корень $x=1$. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень, равный 1.

374. Задача сводится к решению уравнения

$$3\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)=a^3+\frac{1}{a^3}.$$

Обозначим $a+\frac{1}{a}=t$, тогда $t^3=a^3+3a+\frac{3}{a}+\frac{1}{a^3}$. Следовательно, $a^3+\frac{1}{a^3}=t^3-3t$.

Уравнение примет вид

$$\frac{13}{4}t=t^3-3t; \quad 4t^3-25t=0; \quad t(2t-5)(2t+5)=0;$$

$$t_1=0; \; t_2=-\frac{5}{2}; \; t_3=\frac{5}{2}.$$

Уравнение $a+\frac{1}{a}=0$ корней не имеет. Уравнение $a+\frac{1}{a}=-\frac{5}{2}$ имеет отрицательные корни, что не соответствует условию задачи. Уравнение $a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$ имеет корни $a_1=\frac{1}{2}$; $a_2=2$.

375. б) $x^3-\frac{1}{x^3}=19\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

Обозначим $x-\frac{1}{x}=t$; $t^3=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x-\frac{1}{x}\right)$. Отсюда $x^3-\frac{1}{x^3}=t^3+3t$.

Имеем

$$t^3+3t=19t; \quad t(t^2-16)=0; \quad t(t-4)(t+4)=0;$$

$$t_1=0; \; t_2=-4; \; t_3=4.$$

$x - \frac{1}{x} = 0;\ \ x_1 = -1;\ \ x_2 = 1.$

$x - \frac{1}{x} = 4;\quad x^2 - 4x - 1 = 0;\quad x_3 = 2 - \sqrt{5};\ \ x_4 = 2 + \sqrt{5};$

$x - \frac{1}{x} = -4;\quad x^2 + 4x - 1 = 0;\quad x_5 = -2 - \sqrt{5};\ \ x_6 = -2 + \sqrt{5}.$

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 10

10. $x^4 - 41x^2 + 400 = 0;\quad x^2 = y;$
$y^2 - 41y + 400 = 0;\quad y_1 = 16;\ y_2 = 25;$
$x^2 = 16;\ x_1 = -4;\ x_2 = 4;$
$x^2 = 25;\ x_3 = -5;\ x_4 = 5.$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4 + 4 - 5 + 5 = 0;$
$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = (-4) \cdot 4 \cdot (-5) \cdot 5 = 400.$

Сумма корней уравнения равна нулю, т. е. равна коэффициентам при x^3 и x^1, а произведение корней равно свободному члену, т. е. коэффициенту при x^0.

11. Биквадратное уравнение $x^4 - 36x^2 + 2k = 0$ имеет четыре корня, если уравнение $y^2 - 36y + 2k = 0$, где $y = x^2$, имеет два положительных корня.

Найдём дискриминант уравнения $y^2 - 36y + 2k = 0$:

$$D = 1296 - 8k.$$

Уравнение имеет два корня, если $D > 0$, т. е. если $8k < 1296$, $k < 162$.

Сумма корней равна 36, а их произведение равно $2k$. Оба корня будут положительны, если $2k > 0$, т. е. если $k > 0$.

Следовательно, исходное уравнение имеет четыре корня, если выполняется двойное неравенство $0 < k < 162$.

12. Воспользуемся тем, что

$$(x + 5)(x + 8) = x^2 + 13x + 40;$$
$$(x + 6)(x + 7) = x^2 + 13x + 42.$$

Введём вспомогательную переменную $y = x^2 + 13x$. Уравнение примет вид $(y + 40)(y + 42) = 120$. Имеем

$$y^2 + 82y + 1560 = 0;\quad y_1 = -52;\ y_2 = -30.$$

Ни одно из уравнений $x^2 + 13x = -52$ и $x^2 + 13x = -30$ не имеет корней, следовательно, исходное уравнение корней не имеет.

13. Значение коэффициента a найдём, подставив в уравнение значение корня, равное 5:

$$125 - 25a + 30 - 5 = 0; \quad a = 6.$$

Имеем уравнение

$$x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0; \quad x^3 - 5x^2 - x^2 + 5x + x - 5 = 0;$$
$$x^2(x - 5) - x(x - 5) + (x - 5) = 0; \quad (x - 5)(x^2 - x + 1) = 0.$$
$$x - 5 = 0; \ x = 5.$$

Уравнение $x^2 - x + 1 = 0$ корней не имеет. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x = 5$.

15. Очевидно, что в качестве примера можно взять уравнение $(x + 3)(x + 2)(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$. Преобразуем левую часть уравнения в многочлен

$$P(x) = (x^2 + 6 + 5x)(x^2 + 6 - 5x)(x - 1) =$$
$$= ((x^2 + 6)^2 - 25x^2)(x - 1) = (x^4 - 13x^2 + 36)(x - 1) =$$
$$= x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36.$$

Итак, уравнение имеет вид

$$x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36 = 0.$$

17. График функции $y = 2ax^3 + 3x^2 - 4x - 12$ пересекает ось x в точках с ординатами, равными нулю. Одна из этих точек имеет координаты $(-2;\ 0)$. Следовательно,

$$2a \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 12 = 0.$$

Отсюда $16a = 8$; $a = \frac{1}{2}$.

Итак, функция имеет вид $y = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$.

Найдём абсциссы других точек пересечения графика этой функции с осью x:

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0; \ x^2(x + 3) - 4(x + 3) = 0;$$
$$(x + 3)(x - 2)(x + 2) = 0; \ x_1 = -3; \ x_2 = -2; \ x_3 = 2.$$

График данной функции пересекает ось x в точках $(-3;\ 0)$, $(-2;\ 0)$ и $(2;\ 0)$.

18. $11(x - 2) - 8(p + 4) = 14x - 5p$.

Преобразовав данное уравнение, получим

$$3x + 3p + 54 = 0; \quad x + p + 18 = 0.$$

Отсюда $x = -p - 18$.

$x < 0$, если $-p - 18 < 0$, т. е. если $p > -18$.

19. Представим данное уравнение в виде $x^2(2c - 1) + 4x + 0{,}5 = 0$. Уравнение имеет два корня, если его дискриминант положителен.

$$D = 16 - 2(2c - 1) = 18 - 4c; \ D > 0, \text{ если } c < 4{,}5.$$

Натуральное значение c, при котором уравнение имеет два корня, равно одному из чисел: 1, 2, 3 или 4.

П у н к т 1 1

6. Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{2x-5}{x-1}=\frac{5x-3}{3x+5}.$$

Имеем

$$6x^2-5x-25=5x^2-8x+3;$$
$$x^2+3x-28=0;\quad x_1=-7;\ x_2=4.$$

Если $x=-7$, то $y=\frac{-14-5}{-8}=\frac{19}{8}=2\frac{3}{8}$; если $x=4$, то $y=\frac{8-5}{3}=1.$

Графики пересекаются в точках $\left(-7;\ 2\frac{3}{8}\right)$ и $(4;\ 1)$.

10. $x^2+\frac{1}{x^2}+2=4{,}5\left(x+\frac{1}{x}\right)-5.$

Введём новую переменную $t=x+\frac{1}{x}$. Тогда $t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$, отсюда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2.$

Имеем $t^2=4{,}5t-5;\quad 2t^2-9t+10=0;\quad t_1=2;\ t_2=\frac{5}{2}.$

Из уравнения $x+\frac{1}{x}=2$ получаем $x_1=1.$

Из уравнения $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ получаем $x_2=\frac{1}{2};\ x_3=2.$

13. Задача сводится к решению уравнения $\frac{25}{x}=x^2+x-25.$ Имеем

$$x^3+x^2-25x-25=0;\quad x^2(x+1)-25(x+1)=0;$$
$$(x+1)(x-5)(x+5)=0;\quad x_1=-1;\ x_2=-5,\ x_3=5.$$

Графики функций пересекаются в точках $(-1;\ -25)$, $(-5;\ -5)$ и $(5;\ 5)$.

14. Воспользуемся тем, что

$$\frac{x^2-8x+3}{x-8}=x+\frac{3}{x-8},\qquad \frac{x^2+8x+1}{x+8}=x+\frac{1}{x+8}.$$

Уравнение примет вид

$$x+\frac{3}{x-8}-x-\frac{1}{x+8}=-\frac{5}{6}.$$
$$\frac{3}{x-8}-\frac{1}{x+8}=-\frac{5}{6};\qquad \frac{3x+24-x+8}{x^2-64}=-\frac{5}{6};$$
$$6(2x+32)=-5(x^2-64);$$
$$5x^2+12x-128=0;\quad x_1=-6{,}4;\ x_2=4.$$

16. Введём новую переменную $y = x + \frac{2}{x}$. Имеем уравнение

$$\frac{y}{(y-1)^2} = \frac{3}{4}; \quad 4y = 3(y^2 - 2y + 1);$$

$$3y^2 - 10y + 3 = 0; \quad y_1 = \frac{1}{3}; \; y_2 = 3.$$

Уравнение $x + \frac{2}{x} = \frac{1}{3}$ корней не имеет. Уравнение $x + \frac{2}{x} = 3$ имеет корни $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

17. а) Запишем исходное уравнение в виде

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 24 = 0.$$

Введём новую переменную $t = x + \frac{1}{x}$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Уравнение примет вид

$$3(t^2 - 2) - t - 24 = 0; \quad 3t^2 - t - 30 = 0; \; t_1 = -3; \; t_2 = \frac{10}{3}.$$

Решим уравнения $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ и $x + \frac{1}{x} = -3$:

$$3x^2 - 10x + 3 = 0; \quad x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = 3;$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0; \quad x_3 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}; \quad x_4 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}.$$

§ 6. Неравенства с одной переменной

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
14	Решение неравенств второй степени с одной переменной	4 (4)
15	Решение неравенств методом интервалов	2 (3)
	Контрольная работа № 4	1

Содержание материала

С решением неравенств первой степени с одной переменной учащиеся познакомились в курсе алгебры 8 класса. В пункте 14 они получают представление о способе решения неравенств второй степени с одной переменной, т. е. неравенств вида $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причём $a \neq 0$. Согласно принятому в учебнике подходу решение таких неравенств выполняется с опорой на известные учащимся сведения о графике квадратичной функции, т. е. функции, задаваемой формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

Определив, как в конкретном случае расположена в координатной плоскости парабола $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси x (пересекает ось x, касается её или не пересекает), и учитывая направление ветвей параболы, учащиеся изображают параболу схематически и указывают множество решений неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$.

В пункте 15 учащиеся получают представление о методе интервалов и его применении при решении неравенств вида

$$(x - x_1)(x - x_2)... (x - x_n) > 0,$$
$$(x - x_1)(x - x_2)... (x - x_n) < 0,$$

где x — переменная, x_1, x_2, ..., x_n — не равные друг другу числа.

Учащиеся знакомятся с использованием метода интервалов при решении неравенств вида

$$\frac{ax+b}{cx+d} > 0 \text{ и } \frac{ax+b}{cx+d} < 0.$$

Основная цель

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы выработать умение учащихся решать неравенства второй степени с одной переменной с помощью графика квадратичной функции и сформировать у них представление о применении метода интервалов при решении неравенств вида

$$(x - x_1)(x - x_2)... (x - x_n) > 0,$$
$$(x - x_1)(x - x_2)... (x - x_n) < 0,$$

где x — переменная, x_1, x_2, ..., x_n — не равные друг другу числа.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

При изучении данного параграфа учащиеся овладевают умением решать неравенства второй степени с одной переменной, т. е. неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$, где $a \neq 0$. Они учатся находить множество решений таких неравенств, используя схематически построенный график функции $y = ax^2 + bx + c$. Для схематического изображения графика выясняется, куда направлены ветви параболы (вверх или вниз), пересекает ли парабола ось x и если пересекает, то каковы абсциссы точек пересечения.

Формируется также умение учащихся находить множества решений неравенств вида

$$(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) > 0,$$
$$(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) < 0,$$

где x_1, x_2, ..., x_n — не равные друг другу числа, с использованием для этого метода интервалов. Они учатся применять метод интервалов при решении неравенств вида

$$\frac{ax+b}{cx+d} > 0 \text{ и } \frac{ax+b}{cx+d} < 0,$$

заменяя эти неравенства равносильными неравенствами

$$(ax + b)(cx + d) > 0 \text{ или } (ax + b)(cx + d) < 0.$$

Методические рекомендации

В курсе алгебры 8 класса учащиеся познакомились с решением неравенств первой степени с одной переменной. Теперь им предстоит овладеть умением решать неравенства второй степени с одной переменной, т. е. неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ или } ax^2 + bx + c < 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Формируемое умение основано на известных учащимся сведениях о графике функции $y = ax^2 + bx + c$. Учащиеся должны проанализировать, как в рассматриваемом конкретном случае расположен в координатной плоскости график соответствующей квадратичной функции: куда направлены ветви параболы (вверх или вниз), пересекает ли парабола ось абсцисс и если пересекает, то в каких точках. Рекомендуется подробно рассмотреть с учащимися авторские примеры 1—4, представленные в пункте 14. Выработке соответствующего умения учащихся способствуют упражнения **304—309**. Далее учащиеся приступают к выполнению заданий **310—319**, где умение решать неравенства второй степени применяется в усложнённых ситуациях. Специальное внимание рекомендуется уделить заданию **315**, предназначенному для работы в парах.

Упражнения, представленные в пункте 14, завершают задания **320** и **321**, в которых учащиеся встречаются с системами неравенств второй степени с одной переменной. Здесь они должны не только правильно определить множество решений каждого неравенства системы, но и найти пересечение этих множеств.

В пункте 15 учащиеся знакомятся с методом интервалов как одним из возможных методов решения неравенств с одной переменной. В учебнике разъясняется применение этого метода при решении неравенств вида

$$(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) > 0,$$
$$(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) < 0,$$

где x_1, x_2, ..., x_n — не равные друг другу числа.

Подходы к применению метода интервалов рассмотрены в учебнике в авторских примерах 1—3. Они используются учащимися при выполнении упражнений **325—333**.

Особое внимание следует уделить авторским примерам 4 и 5. В примере 4 показано применение метода интервалов при решении дробно-линейного неравенства. Важно подчеркнуть, что при всех значениях x, при которых дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$ имеет смысл, неравенство $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ равносильно неравенству $(ax+b)(cx+d) > 0$, а неравенство $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$ равносильно неравенству $(ax+b)(cx+d) < 0$. Это следует из того, что при указанных значениях x знак дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ совпадает со знаком произведения $(ax+b)(cx+d)$. Необходимо обратить внимание учащихся на то, что нестрогое неравенство $\frac{ax+b}{cx+d} \geqslant 0$ равносильно системе $\begin{cases}(ax+b)(cx+d) \geqslant 0,\\ cx+d \neq 0,\end{cases}$ а нестрогое неравенство $\frac{ax+b}{cx+d} \leqslant 0$ равносильно системе $\begin{cases}(ax+b)(cx+d) \leqslant 0,\\ cx+d \neq 0.\end{cases}$

Задания на решение простейших дробно-линейных неравенств представлены в упражнениях **334—338**.

При наличии времени можно использовать некоторые из дополнительных упражнений к параграфу 6. В их число рекомендуется включить представленную в упражнении **382** задачу-исследование, в которой анализируется вопрос о числе корней заданного биквадратного уравнения с параметром.

Указания к основным упражнениям учебника

304. В заданиях «в», «г», «ж», «з» целесообразно перейти к неравенствам с положительным коэффициентом при x^2, заменив знак неравенства на противоположный.

308. а) Наряду с обычным способом решения неравенства можно применить другой способ: неравенство $x^2 < 16$ равносильно неравенству $|x| < 4$, решением которого является промежуток $(-4;\ 4)$.

310. а) Уравнение $3x^2 + bx + 3 = 0$ имеет два корня, если его дискриминант положителен. Имеем

$$D = b^2 - 36; \quad b^2 - 36 > 0; \quad b^2 > 36; \quad |b| > 6,$$
$$b \in (-\infty;\ -6) \cup (6;\ +\infty).$$

314. а) Областью определения функции $y = \sqrt{12x - 3x^2}$ является множество решений неравенства

$$12x - 3x^2 \geqslant 0, \text{ т. е. } 3x^2 - 12x \leqslant 0.$$

Уравнение $3x^2 - 12x = 0$ имеет корни $x_1 = 0$; $x_2 = 4$. Множество решений данного неравенства — промежуток $[0;\ 4]$. Этот промежуток является областью определения функции y;

б) областью определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 12x + 18}}$ является множество решений неравенства $2x^2 - 12x + 18 > 0$, т. е. $2(x - 3)^2 > 0$. Множество решений данного неравенства: $(-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

Следовательно, область определения заданной функции: $(-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

315. (*Для работы в парах.*) Неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, где a, b, c — некоторые числа, верно при любом значении x, если дискриминант уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ есть число отрицательное, а коэффициент a положителен.

Неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ верно при любом значении x, если дискриминант уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ отрицателен и коэффициент a также отрицателен.

318. Пусть x см — меньшая сторона прямоугольника, тогда его бо́льшая сторона равна $(x + 7)$ см, а площадь равна $x(x + 7)$ см^2.

Следует решить неравенство

$$x(x + 7) \leqslant 60, \text{ т. е. } x^2 + 7x - 60 \leqslant 0.$$

Уравнение $x^2 + 7x - 60 = 0$ имеет корни $x_1 = 5$, $x_2 = -12$. Значит, $x \in [-12;\ 5]$.

Длина стороны прямоугольника должна быть положительным числом. Следовательно, $x \in (0;\ 5]$. Меньшая сторона прямоугольника не должна превышать 5 см.

320. а) Множеством решений неравенства $x^2 - 2x - 8 < 0$ является множество $A = (-2;\ 4)$, а множеством решений неравенства $x^2 - 9 < 0$ является множество $B = (-3;\ 3)$. Следовательно, решением системы этих неравенств является множество $A \cap B = (-2;\ 3)$;

г) множеством решений неравенства $3x^2 + x - 2 \leqslant 0$ является отрезок $A = \left[-1;\ \dfrac{2}{3}\right]$, а множеством решений неравенства $x^2+4x-12 \leqslant 0$ является отрезок $B=[-6;\ 2]$. Следовательно, множеством решений системы этих неравенств является множество $A \cap B = \left[-1;\ \frac{2}{3}\right]$;

е) второе неравенство системы решений не имеет, так как дискриминант уравнения $3x^2+x+11=0$ отрицателен, а первый коэффициент положителен. Следовательно, данная система неравенств решений не имеет.

321. а) Областью определения функции $y=\sqrt{25-x^2}+$ $+\sqrt{9x-x^2-14}$ является множество значений x, при которых оба подкоренных выражения неотрицательны, т. е. множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 25-x^2 \geqslant 0, \\ 9x-x^2-14 \geqslant 0. \end{cases}$$

Множество решений первого неравенства $A=[-5;\ 5]$, множество решений второго неравенства $B=[2;\ 7]$. Значит, областью определения заданной функции является множество $A \cap B=[2;\ 5]$.

Этому промежутку принадлежат четыре целых числа: 2, 3, 4 и 5.

331. б) $-4(x+0{,}9)(x-3{,}2)<0$;

$(x+0{,}9)(x-3{,}2)>0$;

$x \in (-\infty;\ -0{,}9) \cup (3{,}2;\ +\infty)$;

в) $(7x+21)(x-8{,}5) \leqslant 0$;

$7(x+3)(x-8{,}5) \leqslant 0$;

$x \in [-3;\ 8{,}5]$.

332. б) Областью определения функции, заданной формулой $y=\sqrt{(x+12)(x-1)(x-9)}$, служит множество решений неравенства $(x+12)(x-1)(x-9) \geqslant 0$.

Решив неравенство, найдём, что областью определения заданной функции является множество $[-12;\ 1] \cup [9;\ +\infty)$.

335. г) $\dfrac{5x}{4x-12}<0$;

$5x(4x-12)<0$; $\quad 20x(x-3)<0$;

$x \in (0,\ 3)$.

336. б) $\dfrac{x+6}{x-5} \leqslant 0$;

$$\begin{cases} (x+6)(x-5) \leqslant 0; \\ x-5 \neq 0; \end{cases}$$

$x \in [-6;\ 5)$;

г) $\dfrac{3-2x}{x-1} \leqslant 0;$

$$\begin{cases}(3-2x)(x-1) \leqslant 0,\\ x-1 \neq 0;\end{cases} \quad \begin{cases}-2(x-1{,}5)(x-1) \leqslant 0,\\ x-1 \neq 0;\end{cases} \quad \begin{cases}(x-1{,}5)(x-1) \geqslant 0,\\ x-1 \neq 0.\end{cases}$$

$x \in (-\infty;\ 1) \cup [1{,}5;\ +\infty).$

338. в) $\dfrac{x}{x-1} \geqslant 2;\quad \dfrac{x}{x-1} - 2 \geqslant 0;$

$\dfrac{x-2x+2}{x-1} \geqslant 0;\quad \dfrac{x-2}{x-1} \leqslant 0;$

$$\begin{cases}(x-2)(x-1) \leqslant 0,\\ x-1 \neq 0;\end{cases}$$

$x \in (1;\ 2];$

г) $\dfrac{3x-1}{x+2} \geqslant 1;\quad \dfrac{3x-1}{x+2} - 1 \geqslant 0;$

$\dfrac{3x-1-x-2}{x+2} \geqslant 0;\quad \dfrac{2x-3}{x+2} \geqslant 0;$

$$\begin{cases}2(x-1{,}5)(x+2) \geqslant 0,\\ x \neq -2;\end{cases}$$

$x \in (-\infty;\ -2) \cup [1{,}5;\ +\infty).$

Указания к дополнительным упражнениям учебника

377. б) Найдём разность выражений, стоящих в левой и правой частях неравенства, и определим её знак:

$$\frac{1}{4}(x^2-2x-35)-(x^2-2x-8)=\frac{1}{4}(x^2-2x-35-4x^2+8x+32)=$$

$$=\frac{1}{4}(-3x^2+6x-3)=-\frac{3}{4}(x^2-2x+1)=-\frac{3}{4}(x-1)^2 \leqslant 0$$

при любом значении x.

Исходное неравенство доказано.

378. б) Решение задачи сводится к решению системы

$$\begin{cases}16-24x+9x^2 \geqslant 0,\\ x+2 \neq 0;\end{cases} \quad \begin{cases}(3x-4)^2 \geqslant 0,\\ x+2 \neq 0.\end{cases}$$

Неравенство $(3x-4)^2 \geqslant 0$ верно при любом значении x.

Областью определения заданной функции является множество всех действительных чисел, кроме значения x, равного -2, т. е. множество $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ +\infty)$.

379. Уравнение $(a+2)x^2+8x+a-4=0$ имеет два корня, если его дискриминант положителен.

$$D=64-4(a+2)(a-4)=64-4a^2+8a+32=-4a^2+8a+96.$$
$$-4a^2+8a+96>0;\quad a^2-2a-24<0;\quad a\in(-4;\ 6).$$

Из этого интервала надо исключить значение a, равное -2, так как $a+2\neq 0$. Исходное уравнение имеет два корня, если $a\in(-4;\ -2)\cup(-2;\ 6)$.

380. Уравнение $(b-1)x^2+6x+b-3=0$ не имеет корней, если его дискриминант отрицателен.

$$D=36-4(b-1)(b-3)=-4b^2+16b+24.$$
$$-4b^2+16b+24<0;\quad b^2-4b-6>0;\quad b<2-\sqrt{10}, \text{ или } b>2+\sqrt{10}.$$

Таким образом, исходное уравнение не имеет корней, если $b\in(-\infty;\ 2-\sqrt{10})\cup(2+\sqrt{10};\ +\infty)$.

Заметим, что значение b, равное 1, в это множество не входит.

381. а) Введём переменную y, равную x^2. Уравнение $x^4-12x^2+c=0$ не имеет корней, если уравнение $y^2-12y+c=0$ не имеет корней или имеет отрицательные корни.

$$D=144-4c;\ 144-4c<0, \text{ если } c>36.$$

Если $c<36$, то уравнение $y^2-12y+c=0$ или имеет два положительных корня (при $0<c<36$), или имеет один положительный корень (при $c<0$). Если $c=36$, квадратное уравнение имеет один положительный корень.

Следовательно, уравнение $x^4-12x^2+c=0$ не имеет корней, если $c>36$;

б) введём переменную $y=x^2$. Уравнение $x^4+cx^2+100=0$ не имеет корней, если квадратное уравнение $y^2+cy+100=0$ не имеет корней или имеет только отрицательные корни.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

Квадратное уравнение $y^2+cy+100=0$ не имеет корней, если его дискриминант отрицателен, т. е. если $c^2-400<0$. Отсюда $-20<c<20$.

Квадратное уравнение $y^2+cy+100=0$ имеет корни, если его дискриминант неотрицателен, т. е. если $c^2-400\geqslant 0$. Отсюда $c\in(-\infty;\ -20)\cup(20;\ +\infty)$. Причём оба корня отрицательны, если $c>0$, следовательно, $c\geqslant 20$.

Из условий $-20<c<20$ и $c\geqslant 20$ следует, что заданное биквадратное уравнение не имеет корней, если $c>-20$.

382. (*Задача-исследование.*) Введём новую переменную $y = x^2$. Уравнение примет вид $y^2 - 13y + k = 0$.

Полученное квадратное уравнение имеет два корня, если его дискриминант положителен, т. е. $169 - 4k > 0$; $k < 42{,}25$.

Квадратное уравнение имеет один корень, если его дискриминант равен нулю, т. е. если $k = 42{,}25$.

Квадратное уравнение не имеет корней, если его дискриминант отрицателен, т. е. если $k > 42{,}25$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) $D > 0$, т. е. $k < 42{,}25$. Предположим сначала, что k — положительное число, т. е. $k \in (0;\ 42{,}25)$. В этом случае квадратное уравнение имеет два положительных корня, следовательно, биквадратное уравнение имеет четыре корня.

Если же $D > 0$ и число k отрицательное, то квадратное уравнение имеет корни разных знаков, т. е. имеет лишь один положительный корень. В этом случае биквадратное уравнение имеет два корня.

Если $D > 0$ и $k = 0$, то квадратное уравнение имеет два корня: $y_1 = 0$, $y_2 = 13$. Следовательно, биквадратное уравнение имеет три корня: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{13}$, $x_3 = \sqrt{13}$.

2) $D = 0$, т. е. $k = 42{,}25$. Квадратное уравнение имеет единственный корень, причём он положительный. Биквадратное уравнение имеет два корня.

3) $D < 0$, т. е. $k > 42{,}25$. Квадратное уравнение корней не имеет, следовательно, корней не имеет и биквадратное уравнение.

Итак, данное биквадратное уравнение имеет четыре корня, если $k \in (0;\ 42{,}25)$, имеет два корня, если $k = 42{,}25$ или $k < 0$, и не имеет корней, если $k > 42{,}25$.

383. Множеством решений неравенства $x^2 + 6x - 7 \leqslant 0$ является множество $A = [-7;\ 1]$. Множеством решений неравенства $x^2 - 2x - 15 \leqslant 0$ является множество $B = [-3;\ 5]$. Отсюда общим решением этих неравенств является множество $A \cap B = [-3;\ 1]$. Для наглядности целесообразно воспользоваться координатной прямой.

387. а) Произведение $(3x - 5)(x + 4)(2 - x)$ равно нулю при $x = 1\frac{2}{3}$, $x = -4$ и $x = 2$;

б) $(3x - 5)(x + 4)(2 - x) > 0$;

$3\left(x - \frac{5}{3}\right)(x + 4)(x - 2) < 0$;

$x \in (-\infty;\ -4) \cup \left(1\frac{2}{3};\ 2\right)$;

в) $(3x - 5)(x + 4)(2 - x) < 0$; $\quad x \in \left(-4;\ 1\frac{2}{3}\right) \cup (2;\ +\infty)$.

389. г) $x^3 - 0{,}01x > 0;$
$x(x - 0{,}1)(x + 0{,}1) > 0;$
$x \in (-0{,}1;\ 0) \cup (0{,}1;\ +\infty);$
е) $(x^2 - 15x)(x^2 - 36) < 0;$
$x(x - 15)(x - 6)(x + 6) < 0;$
$x \in (-6;\ 0) \cup (6;\ 15).$

391. а) Решение задачи сводится к решению неравенства

$$(3x - 1)(6x + 1) > 0; \quad 3\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot 6\left(x + \frac{1}{6}\right) > 0;$$

$$x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{3};\ +\infty\right).$$

Значит, областью определения заданной функции является множество $\left(-\infty;\ -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{3};\ +\infty\right).$

392. б) Неравенства

$$\frac{x+5}{x-8} \leqslant 0 \text{ и } (x + 5)(x - 8) \leqslant 0$$

не равносильны, так как для первого неравенства значение x, равное 8, не является решением, а для второго неравенства является.

Первое неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (x+5)(x-8) \leqslant 0, \\ x \neq 8. \end{cases}$$

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 12

6. б) Областью определения функции $y = \frac{\sqrt{16x^2 - 1}}{x - 2}$ является множество значений x, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 16x^2 - 1 \geqslant 0, \\ x - 2 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 \geqslant \frac{1}{16}, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Решением неравенства $x^2 \geqslant \frac{1}{16}$ служит множество $\left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4};\ +\infty\right)$. Из этого множества надо исключить значение x, равное 2.

Итак, областью определения заданной функции является множество $\left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4};\ 2\right) \cup (2;\ +\infty).$

13. а) Областью определения функции $y = \frac{\sqrt{x^2 + 15 - 8x}}{x^2 - 4}$ является множество решений системы

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \geqslant 0, \\ x^2 - 4 \neq 0. \end{cases}$$

Решением неравенства $x^2 - 8x + 15 \geqslant 0$ является множество $(-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$. Из этого множества надо исключить значения x, равные -2 и 2.

Следовательно, областью определения заданной функции является множество $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 3] \cup [5; +\infty)$.

Пункт 13

10. а) Неравенство $\frac{(p-2)(p^2+11)(p^2-8p)}{2p-14} < 0$ равносильно неравенству $(p - 2)(p^2 + 11)p(p - 8)(2p - 14) < 0$.

Множитель $p^2 + 11$ положителен при любом значении p. Значит, левую и правую части неравенства можно разделить на $p^2 + 11$:

$$2p(p - 2)(p - 7)(p - 8) < 0.$$

Решением неравенства является множество $(0; 2) \cup (7; 8)$.

11. б) Областью определения функции $y = \sqrt{\frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x - 1}}$ является множество решений системы

$$\begin{cases} (x^3 + 4x^2 + 4x)(x - 1) \geqslant 0, \\ x - 1 \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x + 2)^2(x - 1) \geqslant 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Таким образом, областью определения заданной функции является множество $(-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$.

14. Требуется решить двойное неравенство $1 \leqslant \frac{6x - 1}{4x + 3} \leqslant 8$. Представим его в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} \frac{6x - 1 - 32x - 24}{4x + 3} \leqslant 0, \\ \frac{6x - 1 - 4x - 3}{4x + 3} \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (-26x - 25)(4x + 3) \leqslant 0, \\ (2x - 4)(4x + 3) \geqslant 0, \\ 4x + 3 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (26x + 25)(4x + 3) \geqslant 0, \\ 2(x - 2)(4x + 3) \geqslant 0, \\ x \neq -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является множество $\left(-\infty; -\frac{25}{26}\right] \cup \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$; решением второго неравенства является множество $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right] \cup [2; +\infty)$.

Найдя пересечение этих множеств и исключив из него значение $x = -\frac{3}{4}$, получим решение исходного двойного неравенства: $\left(-\infty; -\frac{25}{26}\right] \cup [2; +\infty)$.

Для тех, кто хочет знать больше

Пункт 16. Некоторые приёмы решения целых уравнений

Методический комментарий

Изучение пункта 16 предоставляет учащимся, интересующимся математикой, возможность сделать новые шаги в овладении умением решать целые уравнения с одной переменной. В данном пункте приводятся теоремы о корне многочлена и о целых корнях целого уравнения, позволяющие расширить круг уравнений, которые смогут решать учащиеся. Один из приёмов решения уравнений с одной переменной третьей или более высокой степени показан в примере 1 при решении уравнения $x^3 - 8x^2 + 13x - 2 = 0$. Из теоремы 1 учащимся известно, что если это уравнение имеет целый корень, то он является делителем свободного члена, т. е. числа −2. Подстановка в уравнение значений x, равных 1, −1, 2, −2, убеждает учащихся в том, что число 2 является корнем уравнения. Разделив многочлен $x^3 - 8x^2 + 13x - 2$ на двучлен $x - 2$, учащиеся представляют исходное уравнение в виде $(x - 2)(x^2 - 6x + 1) = 0$. Отсюда следует, что, кроме корня, равного 2, заданное уравнение имеет ещё два корня: $3 - \sqrt{8}$ и $3 + \sqrt{8}$.

Рекомендуется обратить внимание учащихся на ещё один важный приём, который им приходилось неоднократно использовать при решении целых уравнений. Этот приём состоит во введении новой переменной. В учебнике он разобран в примере 2. Учащихся, вероятно, заинтересует пример 3, в котором введение новой переменной используется для решения возвратного уравнения. Наконец, в примере 4 учащиеся встречаются со случаем, когда на основании теоремы 2 можно найти один корень уравнения (число 2), а затем, опираясь на графические представления, установить, что других корней уравнение не имеет.

Следует отметить, что каждому из рассмотренных в учебнике приёмов решения уравнений соответствует определённый блок упражнений. Ознакомление с новыми теоретическими сведениями и расширение круга упражнений, связанных с решением целых уравнений, позволяют учащимся, интересующимся математикой, сделать новые шаги в достижении личностных, метапредметных и предметных результатов изучения курса алгебры.

Ознакомление учащихся с пунктом 16 можно провести в форме занятия математического кружка. К этому занятию два ученика могут подготовить небольшие сообщения. Один из них может познакомить членов кружка с формулировками теорем 1 и 2, после чего рассказать о способах решения уравнений, представленных в примерах 1 и 4. Второй ученик может рассказать о способе решения уравнения, рассмотренном в примере 2, познакомить членов кружка с понятием возвратного уравнения и способом его решения, представленным в примере 3. После этого учащиеся могут приступить к выполнению включённых в пункт 16 упражнений. При необходимости на это можно выделить ещё одно занятие математического кружка.

Указания к упражнениям учебника

342. а) Число 2 является корнем данного уравнения. Разделив многочлен x^3-4x^2+3x+2 на двучлен $x-2$, получим $(x-2)(x^2-2x-1)=0$. Отсюда $x_1=2$, $x_2=1-\sqrt{2}$, $x_3=1+\sqrt{2}$;

б) число 1 является корнем данного уравнения. Разделив многочлен $x^4+2x^3-7x^2-8x+12$ на двучлен $x-1$, получим, что данное уравнение можно представить в виде

$$(x-1)(x^3+3x^2-4x-12)=0.$$

Уравнение $x^3+3x^2-4x-12=0$ решим, используя разложение левой части на множители:

$$x^3+3x^2-4x-12=x^2(x+3)-4(x+3)=(x+3)(x-2)(x+2).$$

Итак, исходное уравнение имеет корни: -3, -2, 1 и 2.

343. а) Составим уравнение $p^3-p^2-8p+12=0$.

Число 2 — корень данного уравнения. Имеем

$$(p-2)(p^2+p-6)=0.$$

Уравнение $p^2+p-6=0$ имеет корни $p_1=2$ и $p_2=-3$.

Итак, исходное уравнение имеет два корня: 2 и -3.

344. График функции пересекает ось x в точках с ординатой $y = 0$. Решим уравнение

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0.$$

Число 1 — корень данного уравнения. Выполнив деление многочлена $x^3 + 4x^2 + x - 6$ на двучлен $x - 1$, найдём, что

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x^2 + 5x + 6) = (x - 1)(x + 2)(x + 3).$$

Таким образом, график пересекает ось x в точках (1; 0), (−2; 0) и (−3; 0), а ось y — в точке (0; −6).

345. Из уравнения $256 - 64a - 160 + 320 - 96 = 0$ найдём, что $a = 5$. Используя теорему о корне многочлена, получаем тождество

$$x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 80x - 96 = (x - 4)(x^3 - x^2 - 14x + 24).$$

Подбором находим, что число 2 является корнем многочлена $x^3 - x^2 - 14x + 24$. Далее, используя теорему о корне многочлена, получим тождество

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x - 2)(x^2 + x - 12).$$

Имеем

$$x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 80x - 96 = (x - 4)(x - 2)(x + 4)(x - 3).$$

Кроме точки (4; 0), имеются ещё три точки, в которых график пересекает ось абсцисс: (2; 0), (3; 0), (−4; 0).

346. а) Введём новую переменную $y = x^2$. Получим

$$718y^2 - 717y - 1 = 0.$$

Это уравнение имеет корни 1 и $-\frac{1}{718}$. Значит, $x^2 = 1$ или $x^2 = -\frac{1}{718}$, т. е. исходное уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

347. а) Пусть $y = (x + 4)^2$. Тогда $x^2 + 8x = y - 16$. Имеем

$$(y - 16)^2 - 4y - 256 = 0; \quad y_1 = 0; \ y_2 = 36.$$

Значит, $x + 4 = 0$, или $x + 4 = 6$, или $x + 4 = -6$.
Уравнение имеет три корня: −4, 2 и −10;
б) пусть $y = (x - 3)^2$. Тогда $x^2 - 6x = y - 9$. Имеем

$$(y - 9)^2 - 60y - 4 = 0; \quad y_1 = 1, \ y_2 = 77;$$
$$(x - 3)^2 = 1, \ x_1 = 2, \ x_2 = 4;$$
$$(x - 3)^2 = 77, \ x_3 = 3 - \sqrt{77}, \ x_4 = 3 + \sqrt{77}.$$

348. а) Проверяя делители числа −108, находим, что число 4 является корнем данного уравнения. Из равенства $x^3 = -11x + 108$ ясно, что других корней нет, так как функция $y = x^3$ возрастающая, а функция $y = -11x + 108$ убывающая.

350. $10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10 = 0;$

$$10x^2 - 77x + 150 - \frac{77}{x} + \frac{10}{x^2} = 0;$$

$$10\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 77\left(x + \frac{1}{x}\right) + 150 = 0.$$

Пусть $x + \frac{1}{x} = y$, тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$

$10(y^2 - 2) - 77y + 150 = 0;$

$10y^2 - 77y + 130 = 0;$ $y_1 = 5{,}2;$ $y_2 = 2{,}5.$

$x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5};$ $x_1 = 5,$ $x_2 = \frac{1}{5};$

$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2};$ $x_3 = 2,$ $x_4 = \frac{1}{2}.$

351. Если число m — корень уравнения, то верно равенство

$$am^4 + bm^3 + cm^2 + bm + a = 0.$$

Рассмотрим теперь выражение

$$a\left(\frac{1}{m}\right)^4 + b\left(\frac{1}{m}\right)^3 + c\left(\frac{1}{m}\right)^2 + b\left(\frac{1}{m}\right) + a.$$

Оно равно дроби $\frac{a + bm + cm^2 + bm^3 + am^4}{m^4}$ и, следовательно, равно нулю. Значит, число $\frac{1}{m}$ — корень данного возвратного уравнения.

ГЛАВА III

Уравнения и неравенства с двумя переменными

§ 7. Уравнения с двумя переменными и их системы

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
17	Уравнение с двумя переменными и его график	2 (2)
18	Графический способ решения систем уравнений	2 (3)
19	Решение систем уравнений второй степени	3 (5)
20	Решение задач с помощью систем уравнений второй степени	5 (5)

Содержание материала

С понятиями «уравнение с двумя переменными», «график уравнения с двумя переменными», «система уравнений с двумя переменными» учащиеся уже встречались в курсе алгебры 7 и 8 классов. В данном параграфе известные им сведения об уравнениях с двумя переменными и их системах расширяются. Девятиклассники уже знакомы со случаями, когда графиком уравнения с двумя переменными является прямая, парабола, кубическая парабола или гипербола. Теперь они узнают о случаях, когда графиком уравнения с двумя переменными служит окружность или пара прямых.

Сведения о графиках уравнений с двумя переменными являются опорными при ознакомлении учащихся с графическим способом решения систем уравнений второй степени с двумя переменными. Учащиеся также получают представление об аналитическом способе решения таких систем. Основное внимание уделяется системам двух уравнений, одно из которых является уравнением второй степени, а другое — уравнением первой степени.

Приобретённое учащимися умение решать системы уравнений второй степени позволяет расширить круг предлагаемых им текстовых задач. Учащиеся встречаются с разнообразными задачами, в число которых входят задачи на движение, совместную работу, смеси и сплавы и др.

Основная цель

Основная цель изучения материала данного параграфа состоит в том, чтобы выработать умение учащихся решать несложные системы уравнений второй степени с двумя переменными и использовать такие системы при решении текстовых задач.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

В ходе изучения данного параграфа учащиеся делают важные шаги в овладении умением строить графики уравнений с двумя переменными. Впервые они встречаются со случаем, когда графиком такого уравнения является окружность с центром в начале координат или в некоторой другой точке. Учащиеся выполняют несложные задания на решение систем уравнений с двумя переменными графическим способом. Формируется умение учащихся использовать способ подстановки для решения систем, составленных из одного уравнения второй степени, а другого — первой степени. В некоторых, достаточно простых случаях им предлагается решить систему, составленную из двух уравнений второй степени с двумя переменными.

Ознакомление учащихся с системами уравнений второй степени с двумя переменными позволяет им сделать новые шаги в овладении умением использовать аппарат уравнений для решения текстовых задач.

Методический комментарий

Изучение параграфа 7 «Уравнения с двумя переменными и их системы» начинается с повторения в пункте 17 известных учащимся сведений об уравнениях с двумя переменными. Напоминаются определения таких понятий, как «решение уравнения с двумя переменными», «равносильные уравнения с двумя переменными», «график уравнения с двумя переменными». Учащиеся узнают, что графиком уравнения $x^2 + y^2 = r^2$, где r — произвольное положительное число, является окружность радиуса r с центром в начале координат, а уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ — окружность радиуса r с центром в точке с координатами $(a;\ b)$. Учащиеся встречаются со случаями, когда графиком уравнения с двумя переменными служит пара прямых. Рекомендуется обратить их внимание на графики уравнений $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ и $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, изображённые на рисунке 62 учебника. Этот рисунок убеждает учащихся в разнообразии графиков уравнений с двумя переменными.

При изучении пункта 17 учащиеся выполняют различные задания, связанные с понятием графика уравнения с двумя переменными. Рекомендуется специально остановиться на задании **403**, предназначенном для работы в парах. По окончании работы пар полезно организовать коллективное обсуждение полученных ответов. Следует обратить внимание на упражнения **407—411**, для выполнения которых требуется проявить определённую смекалку и сообразительность.

Пункт 18 посвящён графическому способу решения систем уравнений с двумя переменными. Важно познакомить учащихся с разобранным в учебнике примером решения графическим способом системы, составленной из уравнений $y = -x^2 + 2x + 5$ и $x^2 + y^2 = 25$, предложив им с помощью рисунка 65 назвать все пары значений переменных, удовлетворяющие заданной системе. После этого учащиеся могут приступить к выполнению некоторых из заданий **415—423**. Необходимо учитывать, что выполнение этих заданий связано с большими затратами времени. Рекомендуется специально остановиться на упражнении **419**, предназначенном для работы в парах. После завершения работы пар полезно организовать коллективную проверку полученных ответов.

Особое внимание следует уделить пункту 19, где рассматривается аналитический способ решения систем уравнений второй степени с двумя переменными. Предлагаемые здесь учащимся упражнения начинаются с заданий на решение систем уравнений с двумя переменными, составленных из одного уравнения первой степени и одного уравнения второй степени. Учащиеся достаточно легко справляются с такими заданиями, используя для решения систем способ подстановки. Определённую сложность для них составляет задание **443**, в котором применение способа подстановки приводит к уравнению с переменной в знаменателе дроби. С подобной ситуацией учащиеся встретятся в пункте 20 при решении некоторых систем уравнений, составленных по условию текстовых задач. В связи с этим рекомендуется дополнить систему упражнений, включённых в пункт 19, заданиями **533** **(**а, б**)**.

Параграф 7 завершается пунктом 20 «Решение задач с помощью систем уравнений». Этот пункт начинается с решения задачи геометрического содержания, по условию которой составляется система уравнений с двумя переменными, имеющая два решения. Учащиеся должны понимать, что описанная в условии задачи ситуация может случиться в двух различных случаях: когда стороны прямоугольника равны 28 см и 12 см и когда они равны 24 см и 16 см.

Представленные в пункте 20 текстовые задачи разнообразны по тематике. В их число входят задачи **457—460** и **463—465** геометрического содержания, демонстрирующие учащимся значимость приобретённых ими умений. Специальное внимание следует уделить упражнениям **461, 472—474**, в которых представлены задачи на движение. При составлении систем уравнений с двумя переменными по условию каждой из предлагаемых задач учащиеся должны учитывать особенности описанной в ней ситуации. Определённую трудность для учащихся представляют включённые в данный пункт задачи на совместную работу. На примере одной из этих задач учитель должен раскрыть учащимся особенность подхода, используемого для их решения. В значимости приобретённых умений учащиеся убеждаются при решении задачи **468**, связанной с процентными расчётами, а также задачи **470** с физическим содержанием. Особое внимание следует уделить включённым в данный пункт задачам на смеси и сплавы, которые обычно вызывают затруднения у учащихся. Ознакомление с приёмами решения таких задач убеждает учащихся, что приобретённые ими знания и умения находят широкое применение.

Из дополнительных упражнений к параграфу 7 рекомендуется при наличии времени использовать задания **531, 535, 545—547**.

Указания к основным упражнениям учебника

399. д) Графиком уравнения $(x-2)(y-3)=0$ является пара прямых $x=2$ и $y=3$;

ж) графиком уравнения $|x|=2$ является пара прямых $x=-2$ и $x=2$.

403. (*Для работы в парах.*) а) Графиком уравнения $(x-5)(y+6)=0$ является пара прямых $x=5$ и $y=-6$;

б) графиком уравнения $(x-4)(x+2)=0$ является пара прямых $x=4$ и $x=-2$;

в) графиком уравнения $x^2+(y-1)^2=0$ является точка $(0;\ 1)$;

г) графиком уравнения $(x-5)^2+(y+2)^2=1$ является окружность с центром в точке $(5;\ -2)$ и радиусом, равным 1.

405. а) Запишем уравнение окружности с центром в точке $K(2;\ -5)$ и радиусом r:

$$(x-2)^2+(y+5)^2=r^2.$$

Значение r^2 найдём, подставив в это уравнение координаты точки $A(-1;\ -1)$:

$$(-1-2)^2+(-1+5)^2=r^2;\quad r^2=25.$$

Получим уравнение окружности $(x-2)^2+(y+5)^2=25$.

406. Преобразуем левую часть уравнения:

$$x^2 + y^2 - 6(x - y) = (x^2 - 6x) + (y^2 + 6y) =$$
$$= (x - 3)^2 - 9 + (y + 3)^2 - 9 = (x - 3)^2 + (y + 3)^2 - 18.$$

Уравнение примет вид

$$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

Графиком этого уравнения является окружность с центром в точке (3; −3) и радиусом, равным 5.

407. Выполнив преобразования, получим

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 4(x^2 - xy + 0{,}25y^2) = 96;$$
$$4x^2 + 4xy + y^2 - 4x^2 + 4xy - y^2 = 96;$$
$$8xy = 96; \quad xy = 12.$$

График этого уравнения — гипербола.

408. Графиком уравнения $(x - 4)^2 + (y + m)^2 = 15$ является окружность с центром в точке $(4; -m)$. Эта точка расположена в четвёртой координатной четверти, если $-m < 0$, т. е. если $m > 0$.

409. а) Окружность $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = r^2$ касается оси x при $r = 7$;

б) окружность $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = r^2$ касается оси y при $r = 5$.

411. а) Уравнение $xy = 2$ имеет четыре пары целых решений:

$$x_1 = 1,\ y_1 = 2; \quad x_2 = -1,\ y_2 = -2;$$
$$x_3 = 2,\ y_3 = 1; \quad x_4 = -2,\ y_4 = -1;$$

б) представим уравнение $x^2 - y^2 = 3$ в виде $(x - y) \times$ $\times (x + y) = 3$.

Число 3 имеет четыре целых делителя: −3, −1, 1 и 3. Следовательно, возможны следующие случаи:

$$\begin{cases} x - y = -3, \\ x + y = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Решив эти системы, получим четыре пары целых решений:

$$x_1 = -2,\ y_1 = 1; \quad x_2 = 2,\ y_2 = -1;$$
$$x_3 = -2,\ y_3 = -1; \quad x_4 = 2,\ y_4 = 1.$$

419. (*Для работы в парах.*) а) Графиком первого уравнения является гипербола $y = \frac{6}{x}$, графиком второго уравнения — прямая $y = \frac{2}{3}x - 2$. Эти графики пересекаются в двух точках, следовательно, система имеет два решения: $x_1 \approx -1{,}9$, $y_1 \approx -3{,}2$ и $x_2 \approx 4{,}9$, $y_2 \approx 1{,}2$;

б) графиком первого уравнения является окружность с центром в точке (3; 4) и радиусом, равным 2. Графиком второго уравнения является парабола с вершиной в начале координат, ветви которой направлены вверх. Окружность и парабола пересекаются в двух точках, следовательно, система имеет два решения: $x_1 \approx 1{,}6$, $y_1 \approx 2{,}6$ и $x_2 \approx 2{,}4$, $y_2 \approx 5{,}9$.

421. а) Система уравнений не имеет решений, так как график функции $y = x^3$ расположен в первой и третьей координатных четвертях, а график функции $y = -\dfrac{12}{x}$ — во второй и четвёртой координатных четвертях;

б) параболы $y = x^2 + 8$ и $y = -x^2 + 12$ пересекаются в двух точках. Система имеет два решения;

в) парабола $y = x^2 + 1$ и гипербола $y = \dfrac{3}{x}$ имеют единственную общую точку. Система имеет одно решение;

г) окружности $x^2 + y^2 = 9$ и $(x - 10)^2 + y^2 = 16$ не имеют общих точек. Система не имеет решений.

423. Для графического решения данной системы уравнений следует построить пару прямых $x = 2$ и $x = -2$, являющуюся графиком первого уравнения, и пару прямых $y = 3$ и $y = -3$, являющуюся графиком второго уравнения. Эти прямые пересекаются в четырёх точках, следовательно, система имеет четыре решения: (−2; 3), (−2; −3), (2; 3) и (2; −3).

435. а) Выразим из первого уравнения системы x через y:

$$2x + 4y = 5x - 5y; \quad 3x = 9y; \quad x = 3y.$$

Подставим это выражение вместо x во второе уравнение:

$$9y^2 - y^2 = 6; \quad y^2 = \frac{3}{4}; \quad y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Найдём соответствующие значения переменной x: $x_1 = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

438. б) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ y^2 - 6y + 5 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x - 2)(x - 3) = 0, \\ (y - 1)(y - 5) = 0; \end{cases}$

$x = 2$ или $x = 3$; $y = 1$ или $y = 5$.
Каждому значению x соответствуют два значения y.
Система имеет четыре решения: (2; 1), (2; 5), (3; 1), (3; 5).

443. в) $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -2{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 - 3x, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1 - 3x} = -2{,}5. \end{cases}$

Решим второе уравнение системы относительно x:

$$1 - 3x + x = -2{,}5x(1 - 3x);$$
$$7{,}5x^2 - 0{,}5x - 1 = 0;$$
$$15x^2 - x - 2 = 0;\ D = 1 + 120 = 121;$$
$$x_1 = -\frac{1}{3};\quad x_2 = \frac{2}{5}.$$

Найдём соответствующие значения y:

$$y = 1 - 3x;\ y_1 = 2;\ y_2 = -\frac{1}{5}.$$

444. а) Решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 8x + 16, \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$$

Подставим во второе уравнение системы выражение $x^2 - 8x + 16$ вместо y и решим получившееся уравнение:

$$2x - 3(x^2 - 8x + 16) = 0;$$
$$3x^2 - 26x + 48 = 0;$$
$$\frac{D}{4} = 169 - 144 = 25;$$
$$x_1 = \frac{8}{3};\ x_2 = 6.$$

Парабола и прямая пересекаются в двух точках: $\left(2\frac{2}{3};\ 1\frac{7}{9}\right)$ и $(6;\ 4)$;

б) решим систему уравнений

$$\begin{cases} (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 65, \\ 3x - y + 6 = 0; \end{cases}\qquad \begin{cases} (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 65, \\ y = 3x + 6; \end{cases}$$

$$(x - 5)^2 + (3x + 2)^2 = 65;$$
$$x^2 - 10x + 25 + 9x^2 + 12x + 4 - 65 = 0;$$
$$10x^2 + 2x - 36 = 0;\ 5x^2 + x - 18 = 0;$$
$$x_1 = -2;\ x_2 = 1{,}8;$$
$$y_1 = 0;\ y_2 = 11{,}4.$$

Окружность и прямая пересекаются в двух точках: $(-2;\ 0)$ и $(1{,}8;\ 11{,}4)$.

445. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ y = x^2 - 5x + 5; \end{cases}$$

$x - x^2 + 5x - 5 = 4;\quad x^2 - 6x + 9 = 0;\quad (x - 3)^2 = 0;\quad x = 3.$

Из уравнения $x - y = 4$ находим, что $y = -1$.

Система уравнений имеет единственное решение. Значит, парабола $y = x^2 - 5x + 5$ и прямая $x - y = 4$ имеют единственную общую точку (3; −1), т. е. прямая является касательной к параболе.

446. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1, \\ 2x + y + 3 = 0; \end{cases}$$

$$2x + 2x^2 - 5x + 1 + 3 = 0; \quad 2x^2 - 3x + 4 = 0;$$
$$D = 9 - 32 < 0.$$

Следовательно, система уравнений не имеет решений. Значит, парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ и прямая $y = -2x - 3$ не пересекаются.

447. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12, \\ xy = -6; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + \dfrac{36}{x^2} = 12, \\ y = -\dfrac{6}{x}; \end{cases}$

$$x^2 + \frac{36}{x^2} = 12; \quad x^4 - 12x^2 + 36 = 0; \quad (x^2 - 6)^2 = 0; \quad x^2 = 6;$$

$$x_1 = -\sqrt{6}; \quad x_2 = \sqrt{6}; \quad y_1 = \sqrt{6}; \quad y_2 = -\sqrt{6}.$$

448. б) Сложив почленно уравнения системы, получим

$$2x^2 = 72; \quad x_1 = -6; \ x_2 = 6.$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим

$$2y^2 = 50; \quad y_1 = -5; \ y_2 = 5.$$

Система уравнений имеет четыре решения: (−6; − 5), (−6; 5), (6; −5), (6; 5);

в) вычтя из первого уравнения второе, получим $x - y = 2$. Отсюда $x = y + 2$. Подставим это выражение вместо x во второе уравнение системы и решим его:

$$(y + 2)y + y = 54; \quad y^2 + 3y - 54 = 0; \ y_1 = -9; \ y_2 = 6.$$

Отсюда $x_1 = -7$, $x_2 = 8$.

Система имеет два решения: (−7; −9) и (8; 6).

449. а) Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ y = x^2 + 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (x^2 + 6)^2 = 36, \\ y = x^2 + 6. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$x^2 + (x^2 + 6)^2 = 36; \quad x^4 + 13x^2 = 0; \quad x^2(x^2 + 13) = 0; \quad x = 0.$$

Так как $y = x^2 + 6$, то при $x = 0$ получим $y = 6$.

Итак, окружность и парабола имеют одну общую точку (0; 6). Полезно предложить учащимся дать графическую иллюстрацию полученного результата;

б) решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ (x-2)^2 + y^2 = 36; \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = 16 - x^2, \\ (x-2)^2 + (16 - x^2) = 36. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$(x-2)^2 + (16 - x^2) = 36; \quad x^2 - 4x + 4 + 16 - x^2 = 36;$$
$$4x = -16; \quad x = -4.$$

Отсюда $y = 0$. Таким образом, данные окружности имеют одну общую точку (−4; 0).

450. Из системы уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = kx \end{cases}$$

получаем $x^2 - kx + 1 = 0$. Это уравнение имеет единственное решение, если его дискриминант равен нулю. Имеем

$$D = k^2 - 4;$$
$$k^2 - 4 = 0 \text{ при } k = -2 \text{ или } k = 2.$$

Прямые $y = -2x$ и $y = 2x$ являются касательными к параболе $y = x^2 + 1$ (рис. 14).

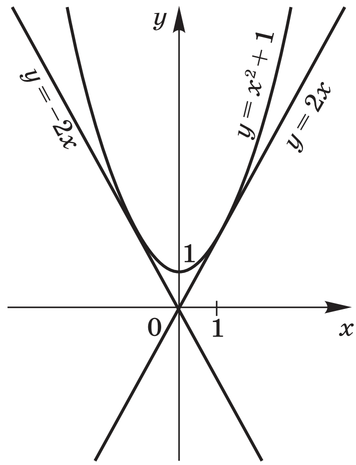

Рис. 14

451. Подставив координаты точки $M(1; 2)$ в уравнение $y = kx$, найдём значение k: $k = 2$.

Для определения координат второй общей точки окружности и прямой решим систему уравнений

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-6)^2 = 25, \\ y = 2x. \end{cases}$$

Получим $x_1 = 1$; $x_2 = 5{,}4$; $y_1 = 2$; $y_2 = 10{,}8$.

Второй точкой пересечения является точка $A(5{,}4; 10{,}8)$.

457. Пусть стороны прямоугольника равны x и y см. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y = 28, \\ x^2 + y^2 = 100. \end{cases}$$

Решив систему, найдём: $x_1 = 6$, $y_1 = 8$; $x_2 = 8$, $y_2 = 6$.

Длины сторон прямоугольника равны 6 и 8 см.

461. Пусть скорость отряда, идущего на север, равна x км/ч, а скорость отряда, идущего на восток, — y км/ч. Тогда первый отряд за 4 ч пройдёт $4x$ км, а второй — $4y$ км (рис. 15). $AC = 4x$, $AB = 4y$.

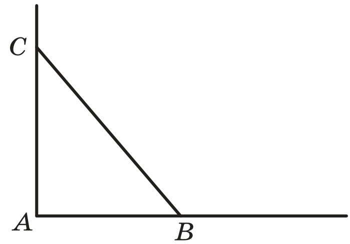

Рис. 15

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 4y = 4{,}8, \\ (4x)^2 + (4y)^2 = 576. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём, что $x_1 = -3{,}6$, $y_1 = -4{,}8$; $x_2 = 4{,}8$, $y_2 = 3{,}6$.

Первый отряд шёл со скоростью 4,8 км/ч, а второй — со скоростью 3,6 км/ч.

466. Пусть первый комбайнёр может убрать урожай за x ч, а второй — за y ч. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = 24, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{35}. \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение системы вместо y выражение $24 + x$, получим

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{24 + x} = \frac{1}{35}; \quad x^2 - 46x - 840 = 0;$$

$$x_1 = 60; \; x_2 = -14; \quad y_1 = 84; \; y_2 = 10.$$

Первый комбайнёр может убрать весь урожай за 60 ч, второй — за 84 ч.

468. Предположим, что вкладчик положил в банк x р. под $y\%$ годовых. Тогда $x \cdot \frac{y}{100} = 400$ (р.). На начало второго года сумма составила $(x + 400)$ р., а в конце года она стала равной $x + 400 + \frac{(x + 400)y}{100}$, т. е. $(x + 400)\left(1 + \frac{y}{100}\right)$ р.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x \cdot \dfrac{y}{100} = 400, \\ (x + 400)\left(1 + \dfrac{y}{100}\right) = 5832. \end{cases}$$

Значение $x = \frac{40000}{y}$ подставляем во второе уравнение. Получаем

$$\left(\frac{40000}{y} + 400\right)\left(1 + \frac{y}{100}\right) = 5832;$$

$$y^2 - 1258y + 10\,000 = 0;$$

$$\frac{D}{4} = 395\,641 - 10\,000 = 385\,641;$$

$$y_1 = 8;\ y_2 = 1250.$$

Второй корень не соответствует смыслу задачи. Следовательно, $y = 8$; $x = \frac{40\,000}{8} = 5000.$

Итак, в банк было положено 5000 р. под 8 % годовых.

Замечание. При вычислении $\sqrt{385\,641}$ следует воспользоваться калькулятором.

469. Пусть первый экскаватор может выполнить весь объём земляных работ за x ч, а второй — за y ч.

Тогда первый экскаватор может за 1 ч выполнить $\frac{1}{x}$ часть всей работы, а второй — $\frac{1}{y}$ часть. При совместной работе они могут за 1 ч выполнить $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ часть всей работы, а за $3\frac{3}{4}$ ч — всю работу, т. е. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 3\frac{3}{4} = 1.$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{15}{4} = 1. \end{cases}$$

Решая систему методом подстановки, получаем квадратное уравнение $2x^2 - 23x + 30 = 0$, имеющее корни $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 10$.

Значит, решения системы таковы: $x_1 = 1{,}5$; $y_1 = -2{,}5$; $x_2 = 10$; $y_2 = 6$. Первое решение не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, первому экскаватору для выполнения всей работы понадобится 10 ч, а второму — 6 ч.

471. Пусть масса детали старого типа равна x кг, а нового типа — y кг. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y = x - 0{,}2 \\ \frac{22}{y} - \frac{24}{x} = 2. \end{cases}$$

Решив систему, получим $x_1 = -2$; $y_1 = -2{,}2$; $x_2 = 1{,}2$; $y_2 = 1$.

Первое решение не соответствует смыслу задачи. Следовательно, масса детали старого типа была равна 1,2 кг, а нового — 1 кг.

472. Пусть скорость пешехода, вышедшего из пункта A, равна x км/ч, а скорость пешехода, вышедшего из пункта B, — y км/ч. По условию задачи $4x + 4y = 40 - 4$, т. е. $x + y = 9$.

Если бы первый пешеход вышел из пункта A на 1 ч раньше, чем второй вышел из пункта B, то каждый из них прошёл бы до встречи по 20 км, причём $\frac{20}{x} - \frac{20}{y} = 1$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{20}{x} - \frac{20}{y} = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём, что $x_1 = 45$; $y_1 = -36$; $x_2 = 4$, $y_2 = 5$.

Первое решение не соответствует смыслу задачи. Значит, скорость первого пешехода была 4 км/ч, а второго — 5 км/ч.

474. Пусть x км/ч — скорость мотоциклиста, выехавшего из пункта M, а y км/ч — скорость мотоциклиста, выехавшего из пункта N. Тогда за 30 мин первый мотоциклист проехал $\frac{x}{2}$ км, а второй — $\frac{y}{2}$ км. По условию $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 50$.

На весь путь первый мотоциклист затратил $\frac{50}{x}$ ч, а второй — $\frac{50}{y}$ ч. Известно, что $\frac{50}{x} - \frac{50}{y} = \frac{25}{60}$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 50, \\ \frac{50}{x} - \frac{50}{y} = \frac{25}{60}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 100, \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{60}. \end{cases}$$

Решив эту систему и отбросив отрицательные значения x и y, найдём, что мотоциклист, выехавший из пункта M, двигался со скоростью 40 км/ч, а другой — со скоростью 60 км/ч.

475. Пусть плотность первой жидкости равна x г/см^3, а плотность второй жидкости — y г/см^3. Объём первой жидкости составляет $\frac{12}{x}$ см^3, а второй — $\frac{14}{y}$ см^3. Тогда объём смеси составит $\left(\frac{12}{x} + \frac{14}{y}\right)$ см^3. По условию задачи объём смеси равен $\frac{12+14}{1{,}3}$, т. е. 20 см^3.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y = x + 0{,}2, \\ \dfrac{12}{x} + \dfrac{14}{y} = 20. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что плотность первой жидкости равна 1,2 г/см^3, а плотность второй — 1,4 г/см^3.

476. Обозначим объём куска олова через x см^3, а объём куска меди через y см^3. Плотность олова составляет $\dfrac{356}{x}$ г/см^3, а плотность меди — $\dfrac{438}{y}$ г/см^3.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = 20, \\ \dfrac{356}{x} - \dfrac{438}{y} = 1{,}6. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём, что объём куска олова равен 40 см^3, а объём куска меди — 60 см^3.

477. Предположим, что раствор содержал первоначально x г воды, а его концентрация была равна $y\,\%$. После добавления 150 г воды концентрация раствора стала $(y - 7{,}5)\,\%$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{50}{x+50} \cdot 100 = y, \\ \dfrac{50}{x+200} \cdot 100 = y - 7{,}5. \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{50}{x+50} \cdot 100 - \frac{50}{x+200} \cdot 100 = 7{,}5;$$

$$x^2 + 250x - 90\,000 = 0; \quad x_1 = 200; \; x_2 = -450.$$

Следовательно, раствор содержал 200 г воды и его концентрация была равна $20\,\%$.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

516. а) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 5 = 0; \quad (x + 2y)^2 + 5 = 0.$

Левая часть уравнения принимает положительные значения при любых значениях x и y. Следовательно, уравнение не имеет решений.

517. а) $x^2 + y^2 + 2xy + 1 = 0; \quad (x + 1)^2 + y^2 = 0.$

Равенство справедливо, если $x + 1 = 0$ и $y = 0$. Значит, уравнение имеет единственное решение $(-1;\ 0)$.

518. а) $(y-x-5)(y-x+5)=0;\quad (y-x)^2=25;$
б) $(x^2+y^2-4)(y^2-9)=0;$
$x^2y^2+y^4-4y^2-9x^2-9y^2+36=0;$
$y^4+x^2y^2-13y^2-9x^2+36=0;$
в) $(xy-6)(x^2+y^2-1)=0;$
$x^3y-6x^2+xy^3-6y^2-xy+6=0;$
$x^3y+xy^3-xy-6x^2-6y^2+6=0.$

519. а) Преобразуем уравнение:

$$x^2+y^2-2x-4y+5=0;$$
$$x^2-2x+1+y^2-4y+4-5+5=0;$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2=0.$$

Графиком этого уравнения является точка (1; 2);
б) $y^2-x^4=0;\quad (y-x^2)(y+x^2)=0.$
Графиком этого уравнения является совокупность двух парабол: $y=x^2$ и $y=-x^2$.

520. а) Графиком уравнения $\frac{y-x}{x-2}=0$ является прямая $y=x$ с «выколотой» точкой, абсцисса которой равна 2;

б) графиком уравнения $\frac{y-x^2}{x^2-1}=0$ является парабола $y=x^2$ с «выколотыми» точками, абсциссы которых равны -1 и 1;

в) графиком уравнения $\frac{x^2+y^2-16}{y^2-4}=0$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 4, с «выколотыми» точками: $\left(2\sqrt{3};\ 2\right)$, $\left(-2\sqrt{3};\ 2\right)$, $\left(2\sqrt{3};\ -2\right)$, $\left(-2\sqrt{3};\ -2\right)$;

г) графиком уравнения $\frac{x^2+y^2-1}{x^2-y^2}=0$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1, с «выколотыми» точками: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

522. а) Представим уравнение в виде $(x-y)(x+y)=5$.
Чтобы найти целые решения заданного уравнения, решим системы

$$\begin{cases}x-y=1,\\x+y=5;\end{cases}\quad \begin{cases}x-y=-1,\\x+y=-5;\end{cases}\quad \begin{cases}x-y=5,\\x+y=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x-y=-5,\\x+y=-1.\end{cases}$$

Целые решения системы: (3; 2), (−3; −2), (3; −2), (−3; 2);

б) представим уравнение в виде $(x-y)(x+y)=8$.

Уравнение имеет целые решения, если целые решения имеют системы:

$$\begin{cases}x-y=-1,\\x+y=-8;\end{cases}\quad\begin{cases}x-y=1,\\x+y=8;\end{cases}\quad\begin{cases}x-y=-8,\\x+y=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}x-y=8,\\x+y=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-y=2,\\x+y=4;\end{cases}\quad\begin{cases}x-y=-2,\\x+y=-4;\end{cases}\quad\begin{cases}x-y=4,\\x+y=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x-y=-4,\\x+y=-2.\end{cases}$$

Первые четыре системы не имеют целых решений. Решив остальные четыре системы, получим целые решения: (3; 1), (−3; −1), (3; −1), (−3; 1).

524. а) Запишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases}y=x^2+11,\\y=4-x^2.\end{cases}$$

Графиком первого уравнения является парабола с вершиной в точке (0; 11), ветви которой направлены вверх. Графиком второго уравнения является парабола с вершиной в точке (0; 4), ветви которой направлены вниз. Эти графики не имеют общих точек, следовательно, система не имеет решений;

б) графиком первого уравнения системы является окружность, расположенная в левой полуплоскости, а графиком второго уравнения является окружность, расположенная в правой полуплоскости. Эти графики не имеют общих точек, следовательно, система не имеет решений;

в) графики уравнений $y=|x|$ и $y=\frac{1}{2}x^3$ имеют две общие точки: начало координат и точка пересечения луча $y=x$, где $x>0$, с кубической параболой. Система имеет два решения.

525. Парабола $y=-x^2+4$ имеет вершину в точке (0; 4), она пересекает ось x в точках (−2; 0) и (2; 0).

Из взаимного расположения графиков окружности $x^2+y^2=r^2$ и параболы $y=-x^2+4$ ясно, что при $r>4$ они пересекаются в двух точках, расположенных в нижней полуплоскости. Следовательно, при $r>4$ система уравнений имеет два решения.

Если $r=4$, то окружность и парабола имеют три общие точки, следовательно, система имеет три решения.

Рассмотрим случай $0<r<4$. Найдём координаты общих точек окружности и параболы, решив систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=r^2,\\y=-x^2+4.\end{cases}$$

Имеем биквадратное уравнение

$$x^2+(4-x^2)^2=r^2;\quad x^4-7x^2+(16-r^2)=0.$$

Введём переменную $z=x^2$. Полученное квадратное уравнение $z^2-7z+(16-r^2)=0$ имеет два решения, если его дискриминант положителен, одно решение, если дискриминант равен нулю, и не имеет решений при отрицательном дискриминанте. Имеем

$$D=49-4(16-r^2)=4r^2-15.$$

Если $D=0$, т. е. $r=\frac{\sqrt{15}}{2}\approx 1{,}94$, то квадратное уравнение имеет одно решение, следовательно, биквадратное уравнение имеет два решения.

Если $D>0$, т. е. $\frac{\sqrt{15}}{2}<r<4$, то квадратное уравнение имеет два положительных корня, следовательно, биквадратное уравнение имеет четыре решения.

Если $D<0$, т. е. $0<r<\frac{\sqrt{15}}{2}$, то квадратное и биквадратное уравнения решений не имеют.

Итак, система уравнений имеет два решения, если $r>4$ или $r=\frac{\sqrt{15}}{2}$, три решения, если $r=4$, четыре решения, если $\frac{\sqrt{15}}{2}<r<4$, и не имеет решений, если $0<r<\frac{\sqrt{15}}{2}$.

526. Выполнив подстановку $y=x-m$, получим квадратное уравнение

$$2x^2-2mx+m^2-5=0.$$

Уравнение имеет единственное решение, если его дискриминант равен нулю. Имеем

$$D=4m^2-8(m^2-5)=40-4m^2=4(10-m^2);$$

$$10-m^2=0 \text{ при } m_1=-\sqrt{10},\quad m_2=\sqrt{10}.$$

Уравнение имеет два решения, если его дискриминант положителен.

$D>0$ при $-\sqrt{10}<m<\sqrt{10}$.

530. а) Умножив второе уравнение системы на 4 и сложив полученное уравнение с первым, найдём, что $5x^2-5x=0$. Отсюда $x_1=0$, $x_2=1$.

$y=-x^2+2x-5$. Поэтому если $x=0$, то $y=-5$, если $x=1$, то $y=-4$.

Система имеет два решения: $(0;\ -5)$ и $(1;\ -4)$.

531. б) Вычтя из первого уравнения системы второе уравнение, найдём, что $3x + 3y = 8$. Подставив $x = \frac{8}{3} - y$ в первое уравнение, получим

$$3y^2 - 8y + 22 = 0.$$

Это уравнение решений не имеет, так как его дискриминант равен $64 - 264 = -200$. Следовательно, исходная система уравнений не имеет решений.

532. а) Система

$$\begin{cases} (x+y)(x-y) = 0, \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x - y = 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - y = 0, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Решением первой системы служит пара значений $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$; решением второй системы — $x = 1$; $y = 1$.

Следовательно, данная система имеет два решения: $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ и $(1;\ 1)$;

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ (x - 7y)(x + 7y) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x^2 - 49y^2 = 0. \end{cases}$

Вычтя из первого уравнения второе, получим $50y^2 = 100$. Отсюда $y = -\sqrt{2}$ или $y = \sqrt{2}$.

Из второго уравнения находим, что $x = 7y$ или $x = -7y$. Следовательно, система имеет четыре решения: $(7\sqrt{2};\ \sqrt{2})$, $(7\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$, $(-7\sqrt{2};\ \sqrt{2})$, $(-7\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$.

в) заменив исходную систему уравнений равносильной ей совокупностью двух систем, получим

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - 3 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y - 5 = 0. \end{cases}$$

Первая система имеет два решения: $(3;\ 4)$ и $(3;\ -4)$, вторая система имеет одно решение: $(0;\ 5)$. Следовательно, исходная система уравнений имеет три решения: $(3;\ 4)$, $(3;\ -4)$ и $(0;\ 5)$.

Интересно проиллюстрировать это решение графически: прямая $x - 3 = 0$ пересекает окружность $x^2 + y^2 = 25$ в двух точках, а прямая $y = 5$ касается этой окружности (рис. 16);

г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 50, \\ x(y+1) = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 50, \\ x = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 - y^2 = 50, \\ y + 1 = 0. \end{cases}$

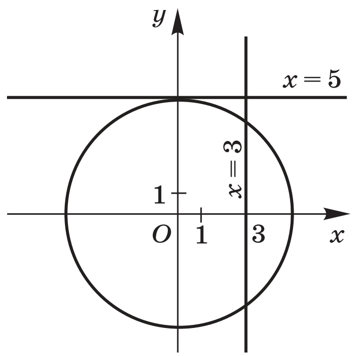

Рис. 16

Первая система решений не имеет. Вторая система имеет два решения: $\left(\sqrt{51};\ -1\right)$ и $\left(-\sqrt{51};\ -1\right)$. Следовательно, исходная система имеет два решения.

533. в) Введём новую переменную $z = \frac{x}{y}$, тогда $\frac{y}{x} = \frac{1}{z}$ и второе уравнение системы примет вид $z + \frac{1}{z} = 2\frac{1}{12}$. Решив его, найдём, что $z_1 = \frac{3}{4}$, $z_2 = \frac{4}{3}$.

Имеем совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x + y = 14, \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 14, \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Решение первой системы: $x = 6$, $y = 8$; решение второй системы: $x = 8$, $y = 6$. Следовательно, данная система имеет два решения: (6; 8) и (8; 6).

534. Решим систему, составленную из первых двух уравнений, и подставим найденное решение в третье уравнение.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -2, \\ 3x + y^2 = 10. \end{cases}$$

Вычтя из второго уравнения первое, получим

$$y^2 + 4y - 12 = 0.$$

Отсюда $y_1 = -6$, $x_1 = -8\frac{2}{3}$; $y_2 = 2$, $x_2 = 2$.

Ни одно из решений $\left(-8\frac{2}{3};\ -6\right)$ и (2; 2) не удовлетворяет третьему уравнению. Следовательно, данная система трёх уравнений решений не имеет.

535. Найдём координаты точки пересечения графиков первых двух уравнений, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

Получим $x = 3$, $y = 4$.

Подставим координаты этой точки в левую часть третьего уравнения. Получим $9 + 12 - 16 - 4 = 1$. Координаты точки (3; 4) удовлетворяют третьему уравнению. Следовательно, все три графика проходят через точку (3; 4).

536. а) Сложив первое уравнение системы со вторым, получим уравнение $2x^2 + 2x - 24 = 0$. Его корни: $x_1 = -4$; $x_2 = 3$.

Подставив эти значения в первое уравнение системы, получим уравнение $y^2 + y - 6 = 0$. Его корни: $y_1 = 2$; $y_2 = -3$.

Система уравнений имеет четыре решения: (−4; 2), (3; 2), (−4; −3), (3; −3);

б) решим первое уравнение системы. Для этого введём новую переменную $z = xy$. Получим

$$z^2 + z - 72 = 0; \quad z_1 = -9; \; z_2 = 8.$$

Далее решаем две системы:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -9 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8. \end{cases}$$

Решения первой системы: $x_1 = 3 - 3\sqrt{2}$; $y_1 = 3 + 3\sqrt{2}$; $x_2 = 3 + 3\sqrt{2}$; $y_2 = 3 - 3\sqrt{2}$. Решения второй системы: $x_1 = 2$; $y_1 = 4$; $x_2 = 4$; $y_2 = 2$.

Совокупность решений этих систем образует множество решений данной системы уравнений;

в) введём новую переменную $z = x + y$. Первое уравнение системы примет вид

$$z^2 - 2z - 15 = 0.$$

Его корни $z_1 = -3$; $z_2 = 5$.

Данная система равносильна совокупности систем уравнений:

$$\begin{cases} x + y = -3, \\ x + xy + y = 11 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = 5, \\ x + xy + y = 11. \end{cases}$$

Первая из этих систем решений не имеет. Решения второй системы (2; 3) и (3; 2) служат решениями исходной системы уравнений.

537. Перемножим данные многочлены и представим полученный многочлен в стандартном виде:

$$(ax^2 - 2x + b)(x^2 + ax - 1) =$$
$$= ax^4 - 2x^3 + bx^2 + a^2x^3 - 2ax^2 + abx - ax^2 + 2x - b =$$
$$= ax^4 + (a^2 - 2)x^3 + (b - 3a)x^2 + (ab + 2)x - b.$$

Приравняем коэффициенты при x^2 и x заданным значениям 8 и -2. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} b - 3a = 8, \\ ab + 2 = -2. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдём, что $a_1 = -\frac{2}{3}$; $b_1 = 6$; $a_2 = -2$; $b_2 = 2$.

540. Обозначим первое число через x, второе число через y. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 100, \\ 3x - 2y = 30. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём, что $x_1 = 10$; $y_1 = 0$; $x_2 = 26$; $y_2 = 24$.

Задача имеет два решения: 10 и 0 или 26 и 24.

541. Обозначим цифру десятков двузначного числа через x, а цифру единиц через y. Искомое число имеет вид $10x + y$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 10x + y = 4(x + y), \\ 10x + y = 2xy. \end{cases}$$

Искомое число 36.

542. Обозначим искомую дробь через $\frac{x}{y}$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y - 1} = 2, \\ \dfrac{x - 1}{y + 1} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём, что $x_1 = 2$; $y_1 = 3$; $x_2 = 6$; $y_2 = 19$.

Задача имеет два решения: $\frac{2}{3}$ и $\frac{6}{19}$.

544. Пусть стороны прямоугольника равны x и y см. Тогда его диагональ равна $\sqrt{x^2+y^2}$ см, а полупериметр равен $(x+y)$ см. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=225, \\ (x-6)+(y-8)=\frac{x+y}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=225, \\ x+y-14=\frac{x+y}{3}. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём, что $x_1=9$; $y_1=12$; $x_2=12$; $y_2=9$.

Стороны прямоугольника равны 9 и 12 см.

545. Пусть через первую трубу бассейн может наполниться за x ч, а через вторую — за y ч. Тогда за 1 ч через первую трубу наполнится $\frac{1}{x}$ часть бассейна, а через вторую — $\frac{1}{y}$ часть. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y=x+5, \\ \frac{5}{x}+\frac{7{,}5}{y}=1. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдём, что $x_1=-2{,}5$; $y_1=2{,}5$; $x_2=10$; $y_2=15$. Отрицательные значения не соответствуют смыслу задачи. Значит, через первую трубу бассейн может наполниться за 10 ч, а через вторую — за 15 ч. При совместной работе трубы за 1 ч могут наполнить $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)$ часть бассейна, т. е. $\frac{1}{6}$ часть. Бассейн может наполниться за 6 ч.

547. Пусть x км/ч — скорость первого поезда, а y км/ч — скорость второго поезда. Тогда первый поезд затратил на весь путь $\frac{270}{x}$ ч, а второй — $\frac{270}{y}$ ч. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+3y=270, \\ \frac{270}{x}-\frac{270}{y}=1\frac{21}{60}; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=90, \\ \frac{10}{x}-\frac{10}{y}=\frac{1}{20}. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём, что $x_1=40$; $y_1=50$; $x_2=450$; $y_2=-360$.

Значения x_2 и y_2 не соответствуют смыслу задачи. Значит, первый поезд ехал со скоростью 40 км/ч, а второй — со скоростью 50 км/ч.

548. Пусть x км/ч — скорость автомобиля, выехавшего из пункта M, а y км/ч — скорость автомобиля, выехавшего из пункта N. Обозначим место встречи автомобилей через C.

Время, через которое автомобили встретились, равно $\frac{90}{x+y}$ ч. Расстояние MC равно $\frac{90x}{x+y}$ км, а расстояние CN равно $\frac{90y}{x+y}$ км.

Первый автомобиль расстояние CN прошёл за $1\frac{1}{4}$ ч, значит, $CN = \frac{5}{4}x$. Второй автомобиль расстояние CM прошёл за $\frac{4}{5}$ ч. Значит, $CM = \frac{4}{5}y$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{90y}{x+y} = \dfrac{5}{4}x, \\ \dfrac{90x}{x+y} = \dfrac{4}{5}y. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём, что $x = 40$ и $y = 50$. Отрицательные значения x и y не соответствуют смыслу задачи. Значит, скорость первого автомобиля — 40 км/ч, а скорость второго — 50 км/ч.

549. Пусть скорость первого туриста равна x км/ч, а второго — y км/ч. Обозначим точку встречи туристов через C.

Пусть t ч — время, затраченное первым туристом на путь AC, тогда $(t+6)$ ч — время, затраченное вторым туристом на путь BC. Отсюда $AC = tx$ км, $BC = (t+6)y$ км. Известно, что $BC - AC = 12$ км. Имеем уравнение

$$(t+6)y - tx = 12.$$

Первый турист прошёл путь CB за 8 ч, следовательно, $BC = 8x$ км. Второй турист прошёл путь AC за 9 ч, следовательно, $AC = 9y$ км. Отсюда

$$y(t+6) = 8x; \quad xt = 9y.$$

Выразив из последнего уравнения t через x и y и подставив выражение $\frac{9y}{x}$ вместо t в первое и второе уравнения, получим систему

$$\begin{cases} y\left(\dfrac{9y}{x} + 6\right) - 9y = 12, \\ y\left(\dfrac{9y}{x} + 6\right) = 8x. \end{cases}$$

Разделим обе части второго уравнения на x:

$$\frac{y}{x}\left(\frac{9y}{x}+6\right)=8.$$

Решив это уравнение относительно $\frac{y}{x}$, найдём, что положительный корень равен $\frac{2}{3}$. Имеем $\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$, отсюда $y=\frac{2}{3}x$. Подставив это выражение вместо y в первое уравнение, найдём, что $x=6$. Отсюда $y=4$.

Значит, первый турист шёл со скоростью 6 км/ч, а второй — со скоростью 4 км/ч.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 14

11. $x(x+4)+y(y-6)=23;$

$x^2+4x+y^2-6y+4+9=23+13;\quad (x+2)^2+(y-3)^2=36.$

Графиком этого уравнения является окружность с центром в точке $(-2;\ 3)$ и радиусом, равным 6.

12. $y-3x^2=8-12(x-1);\quad y=3x^2-12x+20.$

Уравнение имеет вид $y=ax^2+bx+c$, где $a=3$, $b=-12$, $c=20$. Графиком этого уравнения является парабола.

Найдём координаты её вершины $A(m;\ n)$:

$$m=-\frac{-12}{6}=2;\ \ n=8.$$

Вершина параболы — точка $A(2;\ 8)$.

13. а) Окружность касается оси x, если её радиус равен ординате центра окружности, т. е. 11. Уравнение имеет вид

$$(x-6)^2+(y-11)^2=121;$$

б) окружность касается оси y, если её радиус равен абсциссе центра окружности, т. е. 6. Уравнение имеет вид

$$(x-6)^2+(y-11)^2=36.$$

14. а) Значение m найдём, подставив в уравнение окружности координаты точки $C(-7;\ 4)$:

$$(-7+2)^2+(4+m)^2=25;\quad (4+m)^2=0;\quad m=-4.$$

16. Преобразуем данное уравнение:

$$\frac{(x-y)^2}{2}+y(x-4)+2(y+1)=18;$$

$$x^2-2xy+y^2+2xy-8y+4y+4=36;\quad x^2+y^2-4y+4=36;$$

$$x^2+(y-2)^2=36.$$

Графиком уравнения является окружность с центром в точке $(0;\ 2)$ и радиусом 6.

17. в) Представим данное уравнение в виде $y(x-2y)=3$. Имеем четыре системы уравнений:

$$\begin{cases} y=-1, \\ x-2y=-3; \end{cases} \quad \begin{cases} y=1, \\ x-2y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} y=-3, \\ x-2y=-1; \end{cases} \quad \begin{cases} y=3, \\ x-2y=1. \end{cases}$$

Решив эти системы, получим целые решения данного уравнения: (−5; −1), (5; 1), (−7; −3), (7; 3).

П у н к т 15

9. Для графического решения системы уравнений её удобно записать в виде

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-5)^2=16, \\ y=2(x+2)^2-1. \end{cases}$$

10. Систему уравнений удобно записать в виде

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-4, \\ y=-(x+2)^2+2. \end{cases}$$

11. Для решения системы уравнений графическим способом данную систему удобно записать в виде

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=16, \\ x^2+(y-2)^2=25. \end{cases}$$

П у н к т 16

8. Подставим в первое уравнение значение $x=k-y$:

$$(k-y)^2-3y^2=31; \quad 2y^2+2ky+31-k^2=0.$$

Это уравнение не имеет решений, если его дискриминант отрицателен:

$$D=4k^2-8(31-k^2)=12k^2-248;$$

$$12k^2-248<0 \text{ при } k^2<\frac{62}{3}.$$

Данная система не имеет решений при $k\in\left(-\sqrt{\frac{62}{3}};\ \sqrt{\frac{62}{3}}\right)$.

9. Решим первую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ 2x-y=5; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+(2x-5)^2=10, \\ y=2x-5; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-4x+3=0, \\ y=2x-5. \end{cases}$$

Решения этой системы уравнений: $x_1=1$; $y_1=-3$; $x_2=3$; $y_2=1$.

Первое решение $(1;\ -3)$ удовлетворяет второй системе уравнений. Второе решение $(3;\ 1)$ не удовлетворяет второй системе уравнений. Следовательно, эти две системы уравнений не равносильны.

11. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x - 3y = 0, \\ x^2 - 2xy = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ 9y^2 - 6y^2 = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 4. \end{cases}$$

Получим $x_1 = -6;\ y_1 = -2;\ x_2 = 6;\ y_2 = 2$.

Подставим каждое из этих решений в третье уравнение:

$$2x + y^2 = -12 + 4 \neq 16; \quad 2x + y^2 = 12 + 4 = 16.$$

Значит, данная система трёх уравнений имеет единственное решение: $x = 6,\ y = 2$.

12. Значение коэффициента k найдём, подставив в уравнение $y = kx + 1$ координаты точки $M(1;\ 3)$. Имеем

$$3 = k + 1; \quad k = 2.$$

Уравнение прямой примет вид $y = 2x + 1$.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-6)^2 = 18, \\ y = 2x + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-4)^2 + (2x-5)^2 = 18, \\ y = 2x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 - 28x + 23 = 0, \\ y = 2x + 1. \end{cases}$$

Система имеет два решения: $x_1 = 1;\ y_1 = 3$ и $x_2 = 4{,}6;$ $y_2 = 10{,}2$.

Вторая общая точка прямой и окружности имеет координаты $(4{,}6;\ 10{,}2)$.

13. Задача сводится к выяснению ответа на вопрос, имеет ли решение система, составленная из трёх данных уравнений. Решив систему

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + y^2 = 19, \end{cases}$$

получим $x_1 = -3;\ y_1 = -5;\ x_2 = 5;\ y_2 = 3$.

Подставив эти решения в третье уравнение, убедимся, что ни одно из этих решений ему не удовлетворяет. Следовательно, графики заданных уравнений не имеют общих точек.

Пункт 17

10. Пусть первый рабочий может выполнить задание за x ч, а второй — за y ч. Тогда за 3 ч первый рабочий может выполнить $\frac{3}{x}$ часть задания, а второй — $\frac{3}{y}$ часть задания.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = 4, \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{5}{8}. \end{cases}$$

Решив систему, получим $x_1 = -2{,}4$; $y_1 = 1{,}6$ и $x_2 = 8$; $y_2 = 12$.

Отрицательные значения не соответствуют смыслу задачи. Следовательно, первый рабочий может выполнить задание за 8 ч, а второй — за 12 ч.

12. Пусть стороны прямоугольника равны x и y см. Тогда его диагональ равна $\sqrt{x^2 + y^2}$ см, а периметр равен $2(x + y)$ см. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 34, \\ x^2 + y^2 = 676. \end{cases}$$

Возведя обе части первого уравнения в квадрат и вычтя из полученного уравнения второе, найдём, что $2xy = 480$.

Отсюда площадь прямоугольника $xy = 240$ см^2. Следовательно, сторона квадрата, равновеликого этому прямоугольнику, равна $\sqrt{240}$ см $\approx 15{,}5$ см. Заметим, что в этой задаче не было необходимости находить значения сторон прямоугольника.

14. Пусть через первую трубу бассейн может наполниться за x ч, а через вторую — за y ч. Тогда за 1 ч через первую трубу наполняется $\frac{1}{x}$ часть бассейна, а через вторую — $\frac{1}{y}$ часть. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = 6, \\ \dfrac{10}{x} + \dfrac{3}{y} = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x_1 = 12$; $y_1 = 18$, $x_2 = -5$; $y_2 = 1$.

Отрицательные значения не соответствуют смыслу задачи. Значит, за 1 ч через первую трубу наполняется $\frac{1}{12}$ часть бассейна, а через вторую — $\frac{1}{18}$ часть. При совместной работе обеих труб за 1 ч наполнится $\frac{1}{12} + \frac{1}{18}$ часть бассейна, т. е. $\frac{5}{36}$ часть. Следовательно, бассейн наполнится за $\frac{36}{5}$ ч, т. е. за 7 ч 12 мин.

15. Пусть сироп содержал первоначально x г воды, а его концентрация, равная $\frac{250}{x+250}$, составляла $y\%$. После добавления 100 г воды концентрация сиропа стала равна $(y-12{,}5)\%$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{250}{x+250} = \frac{y}{100}, \\ \frac{250}{x+350} = \frac{y-12{,}5}{100}. \end{cases}$$

После преобразований получим квадратное уравнение

$$x^2 + 600x - 112\,500 = 0,$$

имеющее корни $x_1 = -750$; $x_2 = 150$.

Отрицательный корень не соответствует смыслу задачи.

Зная $x = 150$, найдём y: $y = \frac{25\,000}{x+250}$; $y = \frac{25\,000}{400} = 62{,}5$.

Следовательно, первоначально сироп содержал 150 г воды, а его концентрация была равна $62{,}5\%$.

§ 8. Неравенства с двумя переменными и их системы

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
21	Неравенства с двумя переменными	2 (3)
22	Системы неравенств с двумя переменными	2 (4)
	Контрольная работа № 5	1

Содержание материала

В пункте 21 вводятся понятия «неравенство с двумя переменными», «решение неравенства с двумя переменными». Учащиеся знакомятся с изображением на координатной плоскости множеств решений неравенств $x + 2y > 4$, $y \geqslant (x-2)^2$, $x^2 + y^2 \leqslant 16$, $xy > 6$. Они выполняют различные упражнения, в которых предлагается изобразить на координатной плоскости множество решений некоторого неравенства указанного вида или описать неравенством с двумя переменными множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих определённому условию.

В пункте 22 учащиеся знакомятся с системами неравенств с двумя переменными. Им предлагаются несложные упражнения на изображение на координатной плоскости множеств решений некоторых систем неравенств с двумя переменными, а также обратные задания, в которых требуется составить систему неравенств с двумя переменными, задающую на координатной плоскости определённую геометрическую фигуру.

Основная цель

Основная цель изучения материала, представленного в данном параграфе, состоит в том, чтобы познакомить учащихся с геометрической интерпретацией на координатной плоскости множеств решений некоторых неравенств с двумя переменными и их систем.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

В процессе изучения данного параграфа учащиеся овладевают умением определять, принадлежит ли пара значений переменных множеству решений неравенства с двумя переменными или системы таких неравенств. Формируется также умение учащихся изображать на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют некоторому неравенству с двумя переменными или системе таких неравенств.

Методический комментарий

В пункте 21 учащиеся знакомятся с понятиями неравенства с двумя переменными и его решения. Изучение материала начинается с выяснения вопроса о множестве точек координатной плоскости, задаваемом неравенством вида $ax + by > c$ или $ax + by < c$, где x и y — переменные, a, b, c — некоторые числа, причём хотя бы один из коэффициентов a или b отличен от нуля. Рассуждения проводятся на примере неравенства $x + 2y > 4$. Его представляют в виде $y > -0{,}5x + 2$. Учащимся предлагается рассмотреть рисунок 66 учебника, где построена прямая $y = -0{,}5x + 2$. Опираясь на рисунок, они приходят к выводу, что неравенством $y > -0{,}5x + 2$, а значит, и равносильным ему неравенством $x + 2y > 4$ задаётся открытая полуплоскость, расположенная выше прямой $y = -0{,}5x + 2$. Полезно обратить внимание учащихся на то, что выбрать полуплоскость, задаваемую неравенством вида $ax + by < c$ или $ax + by > c$, можно, воспользовавшись методом контрольной точки. Достаточно выбрать в одной из полуплоскостей, определённых прямой $ax + by = c$, произвольную точку и выяснить, какому из неравенств: $ax + by < c$ или $ax + by > c$ — удовлетворяют её координаты. Тем самым определяется неравенство, которому удовлетворяют координаты всех остальных точек этой полуплоскости.

Далее можно познакомить учащихся с примерами 1 и 2, предложив им рассмотреть рисунки 67 и 68 учебника. Учащиеся смогут сами указать множества точек, задаваемых неравенствами $y \geqslant (x-2)^2$ и $x^2 + y^2 \leqslant 16$. Рекомендуется использовать упражнения **482—487**. Следующий урок можно начать с ознакомления учащихся с примером 3, в котором предлагается определить множество точек координатной плоскости, задаваемое неравенством $xy > 6$. Сложность для учащихся в выполнении заданий такого вида состоит в том, что гипербола, являющаяся графиком уравнения $xy = 6$, разбивает координатную плоскость на три области и необходимо исследовать знак произведения xy в каждой из этих областей. Анализируя рисунок 69 учебника, учащиеся убеждаются в том, что множеством точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $xy > 6$, является объединение множества точек, расположенных в первом координатном углу выше одной ветви гиперболы и в третьем координатном углу ниже другой ветви гиперболы. Учащимся можно предложить для работы упражнения **488—492**, а также некоторые из дополнительных упражнений к параграфу 8, например упражнения **550—552**, **554**.

В пункте 22 учащиеся знакомятся с примерами геометрической интерпретации множеств решений систем неравенств с двумя переменными. После рассмотрения авторских примеров 1—3 они приступают к выполнению заданий **497—503**, в которых предлагается изобразить на координатной плоскости множества решений некоторых систем неравенств с двумя переменными или задать системой неравенств множество точек координатной плоскости. Рекомендуется специально остановиться на упражнении **497**, предназначенном для работы в парах. При выполнении этого упражнения учащиеся убеждаются в разнообразии рассмотренных в нём случаев. Следует уделить внимание упражнению **501**, где представлена задача-исследование. При выполнении подобных упражнений вырабатывается умение учащихся проводить доказательные рассуждения, обосновывать своё мнение. Развитию интереса к математике способствует нестандартное упражнение **502**, в котором предлагается задать системой неравенств некоторую фигуру, изображённую на координатной плоскости.

Из дополнительных упражнений к параграфу 8 рекомендуется использовать задания **557**, **558**.

Указания к основным упражнениям учебника

486. При выполнении этого задания должны получиться такие множества точек:

а) полуплоскость, расположенная правее прямой $x = 3$, включающая точки этой прямой;

б) открытая полуплоскость, расположенная ниже прямой $y = -1$;

в) полоса, расположенная между прямыми $x = 1$ и $x = 4$, точки прямых $x = 1$ и $x = 4$ не включаются;

г) полоса, расположенная между прямыми $y = -3$ и $y = 3$, включающая точки этих прямых.

488. (*Для работы в парах.*) а) Множество решений неравенства $xy < 4$ представляет собой область, расположенную между ветвями гиперболы $xy = 4$;

б) множество решений неравенства $xy > -6$ представляет собой область, расположенную между ветвями гиперболы $xy = -6$.

489. а) Преобразуем левую часть данного неравенства:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = \\ = (x-3)^2 + (y-2)^2.$$

Неравенство примет вид $(x-3)^2 + (y-2)^2 \leqslant 0$.

Решением этого неравенства является точка (3; 2);

б) преобразуем левую часть данного неравенства:

$$x^2 - 4x - y + 5 = x^2 - 4x + 4 - y + 1 = (x-2)^2 - y + 1.$$

Неравенство примет вид

$$(x-2)^2 - y + 1 \geqslant 0 \text{ или } y \leqslant (x-2)^2 + 1.$$

Решением этого неравенства является парабола $y = (x-2)^2 + 1$ и область, расположенная ниже этой параболы.

490. б) Уравнение окружности с центром в точке (0; 4) и радиусом, равным 2, имеет вид $x^2 + (y-4)^2 = 4$.

Множество точек, расположенных вне круга, ограниченного данной окружностью, задаётся неравенством $x^2 + (y-4)^2 > 4$.

492. а) Неравенство $xy \geqslant 0$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$$

Множество решений неравенства $xy \geqslant 0$ представляет собой объединение первой и третьей координатных четвертей, включая оси координат;

б) неравенство $xy < 0$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x < 0, \\ y > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 0, \\ y < 0. \end{cases}$$

Решением неравенства $xy < 0$ является объединение второй и четвёртой координатных четвертей, исключая точки, принадлежащие осям координат.

497. (*Для работы в парах.*) В заданиях «б», «в», «г» следует предварительно привести систему неравенств к виду:

б) $\begin{cases} y > \frac{x}{2} - 2, \\ y < -x + 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y < 2x - 1, \\ y < x - 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y \geqslant -x + 3, \\ y > x - 2. \end{cases}$

Множества решений систем показаны на рисунке 17 двойной штриховкой.

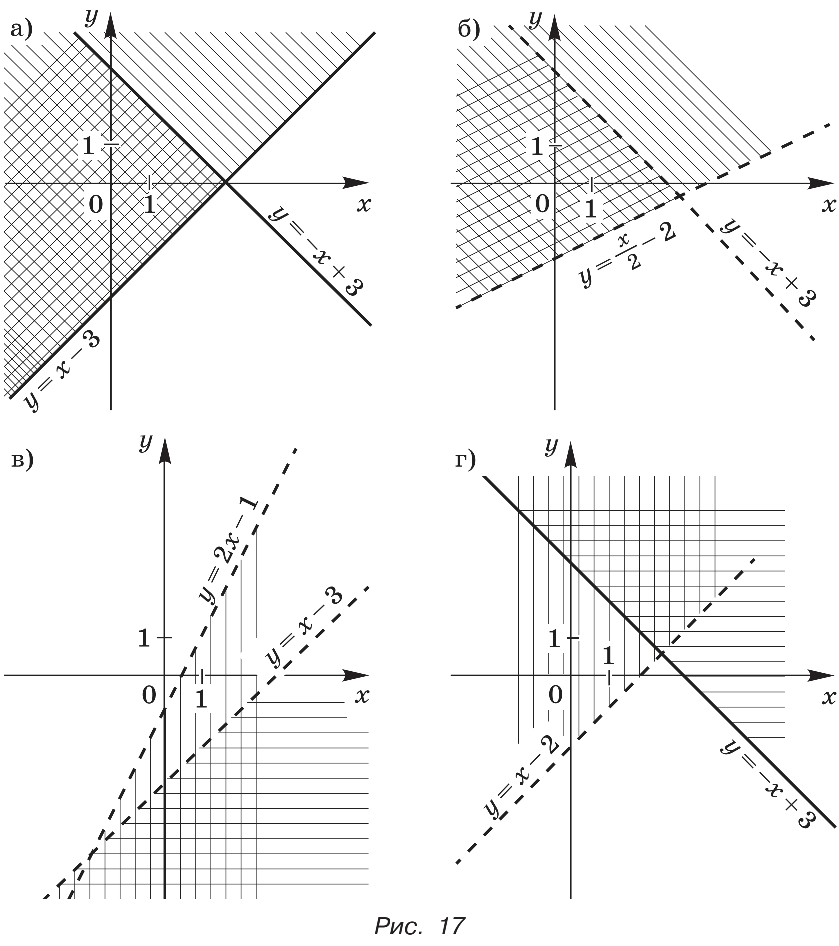

Рис. 17

498. а) Множество решений системы представляет собой на координатной плоскости угол, ограниченный прямыми $x = 2$, $y = 1$, расположенный в первой координатной четверти. Границы принадлежат множеству решений;

б) множество решений системы представляет собой на координатной плоскости угол, ограниченный прямой $x = -1$ и осью x, расположенный во второй координатной четверти. Границы не принадлежат множеству решений;

в) множество решений системы представляет собой на координатной плоскости угол, ограниченный прямыми $x = -2$, $y = 3$, расположенный правее прямой $x = -2$ и ниже прямой $y = 3$. Точки этих прямых принадлежат множеству решений.

499. а) Первую координатную четверть (включая оси координат) задаёт система неравенств $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$

б) третью координатную четверть (включая оси координат) задаёт система неравенств $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$

500. При выполнении этого задания должны получиться следующие множества точек:

а) часть плоскости, расположенная выше параболы $y = x^2$ и ограниченная прямой $y = 4$ (точки параболы $y = x^2$ и прямой $y = 4$ принадлежат множеству решений системы);

б) часть круга с центром в начале координат и радиусом, равным 2, расположенная ниже прямой $y = x$ (точки прямой $y = x$ принадлежат множеству решений системы);

в) общая часть двух кругов радиуса 3, центром одного из которых является начало координат, а центром другого — точка (3; 0);

г) кольцо, ограниченное двумя окружностями с центром в точке (2; −1), радиусы которых равны 1 и 3.

501. (*Задача-исследование.*) Система неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant 3x - 1, \\ y \geqslant kx + b \end{cases}$$

задаёт на координатной плоскости прямую, если $k = 3$, $b = -1$.

Если $k = 3$, $b < -1$, система задаёт на плоскости полосу.

Если $k = 3$, $b > -1$, система неравенств не имеет решений.

Если $k \neq 3$, то при любом значении b система неравенств задаёт на координатной плоскости угол.

502. а) Из равенства $y = kx + b$ находим, что прямая, проходящая через точки (−2; 0) и (0; 3), задаётся уравнением $y = 1{,}5x + 3$, а прямая, проходящая через точки (2; 0) и (0; 3), — уравнением $y = -1{,}5x + 3$.

Система неравенств, задающая треугольник, изображённый на рисунке 73, *а* учебника, имеет вид

$$\begin{cases} y \leqslant 1{,}5x + 3, \\ y \leqslant -1{,}5x + 3, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$$

б) система неравенств, задающая кольцо, изображённое на рисунке 73, *б* учебника, имеет вид

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 25, \\ x^2 + y^2 \leqslant 100. \end{cases}$$

503. Прямая, проходящая через точки (0; 0) и (3; 3), задаётся уравнением $y = x$, а прямая, проходящая через точки (0; −2) и (3; −2), — уравнением $y = -2$.

Искомая система неравенств, задающая угол между этими прямыми, может быть записана в виде

$$\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \geqslant -2. \end{cases}$$

Указания к дополнительным упражнениям учебника

552. а) Множеством точек, у которых абсцисса больше ординаты, является открытая полуплоскость, расположенная ниже прямой $y = x$;

б) множеством точек, у которых абсцисса меньше ординаты, является открытая полуплоскость, расположенная выше прямой $y = x$.

553. а) Преобразуем левую часть неравенства:

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 - 20 = \\ = (x-2)^2 + (y-4)^2 - 20.$$

Неравенство примет вид $(x-2)^2 + (y-4)^2 \leqslant 20$.

Этим неравенством задаётся на координатной плоскости круг с центром в точке (2; 4) и радиусом, равным $\sqrt{20}$;

б) преобразуем левую часть неравенства:

$$x^2 - 6x + y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y - 5 = y - 5 + (x-3)^2.$$

Неравенство примет вид $y > 5 - (x-3)^2$.

Этим неравенством задаётся множество точек, расположенных выше параболы $y = 5 - (x-3)^2$.

554. а) Множество решений неравенства $y \geqslant |x|$ изображается на координатной плоскости углом, ограниченным биссектрисами первого и второго координатных углов. Точки биссектрис принадлежат искомому множеству.

555. а) Неравенство $(x-1)(y-1) \geqslant 0$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ y \geqslant 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leqslant 1, \\ y \leqslant 1. \end{cases}$$

Эти системы задают на координатной плоскости совокупность двух вертикальных углов с общей вершиной (1; 1) и сторонами, параллельными осям координат.

556. Для доказательства можно рассмотреть, какое множество точек задаёт неравенство $|x| + |y| \leqslant 1$ в каждой координатной четверти.

557. а) Система неравенств задаёт на координатной плоскости объединение двух секторов круга с центром в начале координат и радиусом 5, ограниченных осями координат и расположенных во второй и четвёртой координатных четвертях;

б) система неравенств задаёт на координатной плоскости объединение двух областей: области, расположенной в первой координатной четверти вне круга с центром в начале координат и радиусом 3, и области, расположенной в третьей координатной четверти вне этого круга.

558. Система неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant 2x + 3, \\ y \geqslant kx + b \end{cases}$$

задаёт на координатной плоскости полосу, если $k = 2$, $b < 3$, например $b = 1$.

Система неравенств задаёт на координатной плоскости угол, если $k \neq 2$, а b — любое число, например $k = 4$, $b = 2$.

559. а) Имеем совокупность двух систем неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \geqslant 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

В верхней полуплоскости неравенство $y(x^2 + y^2 - 1) \geqslant 0$ задаёт множество всех точек полуплоскости, за исключением точек полукруга с центром в начале координат и радиусом 1. В нижней полуплоскости оно задаёт полукруг с центром в начале координат и радиусом 1.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 18

9. а) Преобразуем левую часть неравенства:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 - 25 = \\ = (x - 3)^2 + (y + 4)^2 - 25.$$

Неравенство примет вид

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 \leqslant 25.$$

Это неравенство задаёт на координатной плоскости круг с центром в точке (3; −4) и радиусом, равным 5;

б) преобразуем левую часть неравенства:

$$x^2 + 10x + y^2 - 2y = x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 - 26 = \\ = (x + 5)^2 + (y - 1)^2 - 26.$$

Неравенство примет вид

$$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 > 36.$$

Это неравенство задаёт на координатной плоскости множество точек, расположенных вне круга с центром в точке (−5; 1) и радиусом, равным 6.

11. Составим уравнение прямой AB, проходящей через точки $A(2;\ 0)$ и $B(-1;\ 3)$.

$$\begin{cases} 0 = 2k + b, \\ 3 = -k + b; \end{cases}$$

$$k = -1;\ b = 2.$$

Уравнение прямой AB имеет вид $y = -x + 2$. Искомое неравенство:

$$y < -x + 2.$$

13. Составим уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, проходящей через точки $A(-2;\ 3)$, $B(5;\ -4)$ и $C(0;\ -9)$, решив систему трёх уравнений относительно коэффициентов a, b и c.

$$\begin{cases} 3 = 4a - 2b + c, \\ -4 = 25a + 5b + c, \\ -9 = c. \end{cases}$$

Решив систему, получим $a = 1,\ b = -4,\ c = -9.$

Уравнение параболы имеет вид $y = x^2 - 4x - 9$. Множество точек, лежащих выше этой параболы, можно задать неравенством

$$y > x^2 - 4x - 9.$$

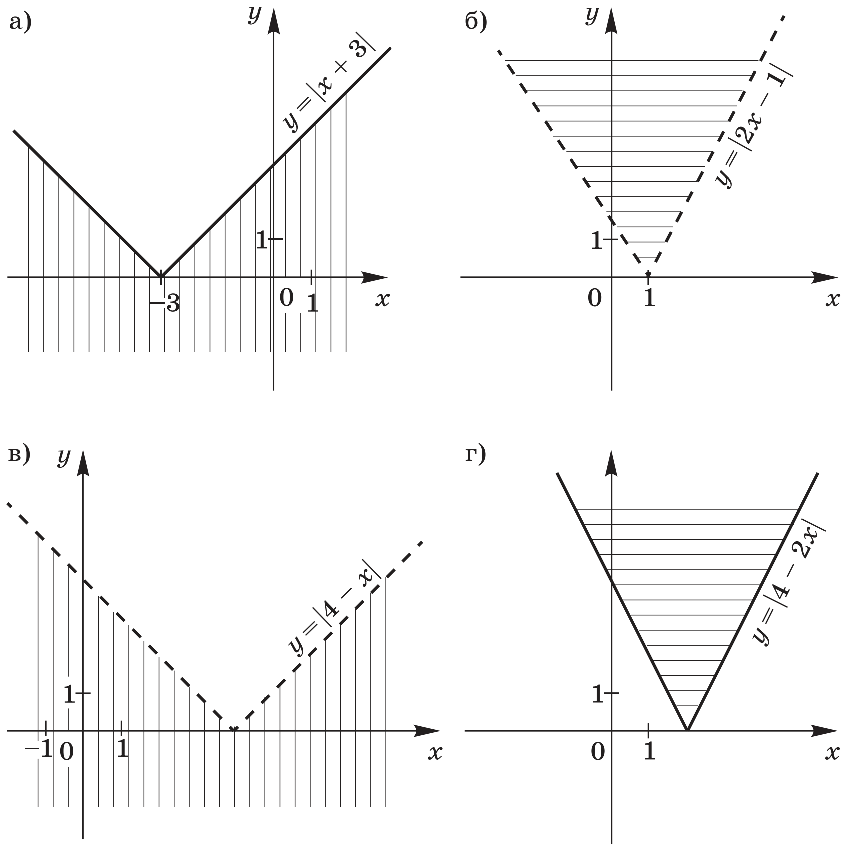

Рис. 18

14. Решение показано на рисунке 18.

Пункт 19

7. а) Неравенство $x-y+4\geqslant 0$ задаёт на координатной плоскости прямую $y=x+4$ и полуплоскость, расположенную ниже этой прямой.

Неравенство $2x+y\leqslant 4$ задаёт на координатной плоскости прямую $y=-2x+4$ и полуплоскость, расположенную ниже этой прямой, а неравенство $y\geqslant 0$ задаёт ось x и полуплоскость, расположенную над ней.

Множество решений системы задаёт на координатной плоскости треугольник (рис. 19) с вершинами $A(-4;\ 0)$, $B(0;\ 4)$ и $C(2;\ 0)$. Площадь этого треугольника равна

$$\frac{AC\cdot BO}{2}=12 \text{ (кв. ед.)};$$

б) множество решений системы задаёт на координатной плоскости кольцо, ограниченное окружностями с центром в начале координат и радиусами 2 и 4. Площадь этого кольца равна

$$16\pi - 4\pi = 12\pi \text{ (кв. ед.).}$$

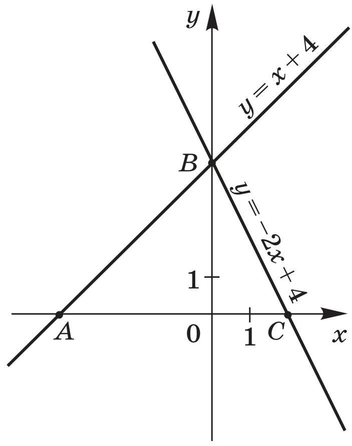

Рис. 19

8. Составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;\ 0)$ и $B(-3;\ 3)$:

$$\begin{cases} 3k + b = 0, \\ -3k + b = 3. \end{cases}$$

Отсюда $k = -0{,}5;\ b = 1{,}5.$

Уравнение прямой имеет вид $y = -0{,}5x + 1{,}5.$

Составим уравнение прямой, проходящей через точки $C(2;\ 4)$ и $D(-1;\ 2)$:

$$\begin{cases} 2k + b = 4, \\ -k + b = 2. \end{cases}$$

Отсюда $k = \frac{2}{3};\ \ b = \frac{8}{3}.$

Уравнение прямой имеет вид $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}.$

Между прямыми $y = -0{,}5x + 1{,}5$ и $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ образуются на координатной плоскости два острых угла (рис. 20), которые можно задать системами неравенств:

а) $\begin{cases} y \leqslant -0{,}5x + 1{,}5, \\ y \geqslant \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \geqslant -0{,}5x + 1{,}5, \\ y \leqslant \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}. \end{cases}$

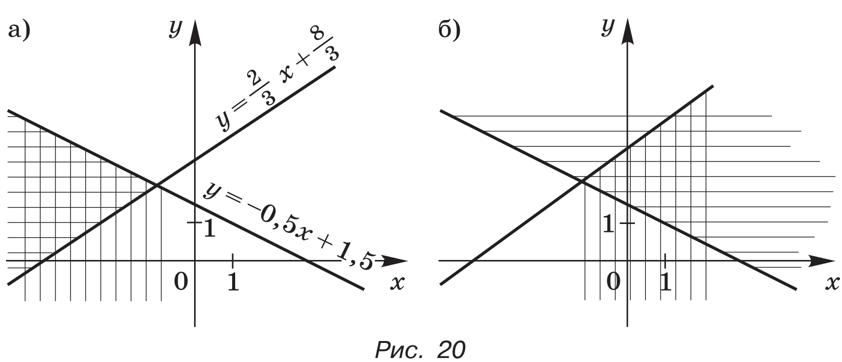

Рис. 20

11. Чтобы задать треугольник системой неравенств, надо найти уравнения трёх прямых, которым принадлежат стороны треугольника.

Так как точки $B(5;\ 0)$ и $C(-5;\ 0)$ принадлежат оси x, то одна из этих прямых $y = 0$.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(0;\ 3)$ и $B(5;\ 0)$:

$$\begin{cases} b = 3, \\ 5k + b = 0. \end{cases}$$

Отсюда $b = 3$, $k = -\frac{3}{5}$, а уравнение прямой имеет вид $y = -\frac{3}{5}x + 3$.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(0;\ 3)$ и $C(-5;\ 0)$:

$$\begin{cases} b = 3, \\ -5k + b = 0. \end{cases}$$

Отсюда $b = 3$, $k = \frac{3}{5}$, а уравнение прямой имеет вид $y = \frac{3}{5}x + 3$.

Система неравенств имеет вид

$$\begin{cases} y \leqslant -\frac{3}{5}x + 3, \\ y \leqslant \frac{3}{5}x + 3, \\ y \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 5y + 3x \leqslant 15, \\ 5y - 3x \leqslant 15, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

12. Окружность с центром в точке $(-2;\ 1)$ и радиусом, равным 4, задаётся уравнением $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(-4;\ 0)$ и $B(3;\ 4)$:

$$\begin{cases} -4k + b = 0, \\ 3k + b = 4. \end{cases}$$

Отсюда $k = \frac{4}{7}$, $b = \frac{16}{7}$, а уравнение прямой имеет вид $y = \frac{4}{7}x + \frac{16}{7}$.

Система неравенств имеет вид

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 16, \\ 7y - 4x \geqslant 16. \end{cases}$$

Пункт 23. Некоторые приёмы решения систем уравнений второй степени с двумя переменными

Методический комментарий

В пункте 19 «Решение систем уравнений второй степени» были рассмотрены приёмы решения систем уравнений с двумя переменными, составленных из одного уравнения первой степени и одного уравнения второй степени, а также простейших систем, составленных из двух уравнений второй степени. В данном пункте учащиеся, интересующиеся математикой, получают возможность познакомиться с нестандартными способами, позволяющими найти множества решений некоторых систем уравнений второй степени с двумя переменными. В примере 1 они встречаются со случаем, когда благодаря разложению многочлена на множители появляется возможность решение достаточно сложной системы двух уравнений второй степени с двумя переменными свести к решению равносильной ей совокупности двух систем, для каждой из которых нетрудно найти соответствующее множество решений. В примере 2 умножение обеих частей уравнения $x^2 - y = 3xy$ на 3 и последующее сложение полученного уравнения с первым уравнением системы приводят к уравнению $x(x - 2y) = 0$, позволяющему заменить исходную систему равносильной ей совокупностью двух достаточно простых систем уравнений, для которых учащимся нетрудно найти соответствующие множества решений.

Наиболее сложным для учащихся является случай, рассмотренный в примере 3. В нём найти решение заданной системы уравнений удаётся, только выполнив некоторую последовательность шагов. Сначала представляют уравнение $3x^2 + 4xy + y^2 = 0$ в виде $3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\frac{x}{y} + 1 = 0$. Затем, используя введение новой переменной, находят из этого уравнения, что $\frac{x}{y} = -1$ или $\frac{x}{y} = -\frac{1}{3}$. В результате решение исходной системы сводится к решению совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x = -y, \\ x^2 - 5xy - 3y - 7 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = -\frac{1}{3}y, \\ x^2 - 5xy - 3y - 7 = 0. \end{cases}$$

Пример 4 интересен тем, что в нём учащиеся впервые встречаются с понятием симметрической системы уравнений и примером решения такой системы путём введения новых переменных.

Ознакомление учащихся с материалом, представленным в данном пункте, рекомендуется провести в форме занятия математического кружка. На этом занятии три члена кружка могут выступить с небольшими сообщениями. Один из них может рассказать о способах решения систем уравнений второй степени, использованных в примерах 1 и 2, другой — познакомить членов кружка с достаточно сложным способом, использованным в примере 3. Третьему ученику можно поручить рассказать об особенностях симметрических систем и способе решения таких систем, рассмотренном в примере 4. После этого члены кружка могут приступить к выполнению под руководством учителя некоторых из упражнений, помещённых в пункте 23.

Указания к упражнениям

507. а) Система уравнений равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-2y=0, \\ x^2-y^2=12 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+3y=0, \\ x^2-y^2=12; \end{cases}$$

б) преобразуем левую часть первого уравнения системы:

$$x^2-4xy+3y^2+2x-6y=x^2-3xy-xy+3y^2+2x-6y=$$
$$=x(x-3y)-y(x-3y)+2(x-3y)=(x-3y)(x-y+2).$$

Заданная система уравнений равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-3y=0, \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x-y+2=0, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$$

Первая система имеет решения $(-3; -1)$ и $(3; 1)$, вторая — $(1; 3)$ и $(-3; -1)$. Исходная система имеет три решения.

508. а) Преобразуем левую часть первого уравнения системы:

$$x^2-y^2+xy-y^2-x+y=(x-y)(x+y)+y(x-y)-(x-y)=$$
$$=(x-y)(x+2y-1).$$

Исходная система уравнений равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+2y-1=0, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$$

б) $x^2 - 6xy + 5y^2 - x + 5y = x^2 - 5xy - xy + 5y^2 - x + 5y =$ $= x(x - 5y) - y(x - 5y) - (x - 5y) = (x - 5y)(x - y - 1)$.

Исходная система уравнений равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x - 5y = 0, \\ x^2 - 20y^2 = 5 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ x^2 - 20y^2 = 5. \end{cases}$$

Первая система имеет два решения: (5; 1) и (−5; −1). Вторая система не имеет решений. Исходная система имеет два решения.

509. а) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 14 = 0, \\ 3x^2 + 2xy - 24 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 6xy + 28 = 0, \\ 9x^2 + 6xy - 72 = 0. \end{cases}$

Сложив уравнения системы, получим

$$11x^2 = 44; \quad x_1 = -2; \; x_2 = 2.$$

Отсюда $y_1 = -3$; $y_2 = 3$;

б) $\begin{cases} 2x^2 - 6y = xy, \\ 3x^2 - 8y = 0{,}5xy; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 6y = xy, \\ 6x^2 - 16y = xy. \end{cases}$

Вычтя из второго уравнения системы первое, получим

$$4x^2 = 10y; \quad y = \frac{2x^2}{5}.$$

Подставим выражение $\frac{2x^2}{5}$ вместо y в первое уравнение системы:

$$2x^2 - \frac{12x^2}{5} = \frac{2x^3}{5}; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = -1.$$

Отсюда $y_1 = 0$; $y_2 = \frac{2}{5}$.

510. а) Пара (0; 0) — решение системы. Рассмотрим случай, когда $y \neq 0$. Разделив обе части первого уравнения на y^2, получим $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) - 10 = 0$. Введём новую переменную $t = \frac{x}{y}$. Тогда

$$t^2 + 3t - 10 = 0; \quad t_1 = -5; \; t_2 = 2.$$

Если $\frac{x}{y} = -5$, т. е. $x = -5y$, то $(-5y)^2 - 4 \cdot (-5y) \cdot y + 3y = 0$.

Отсюда $y_1 = 0$ (не соответствует рассматриваемому случаю), $y_2 = -\frac{1}{15}$. Пара $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{15}\right)$ — решение системы.

Если $\frac{x}{y} = 2$, т. е. $x = 2y$, то

$$4y^2 - 8y^2 + 3y = 0; \quad y_3 = 0{,}75; \quad x_3 = 1{,}5.$$

Система имеет три решения: (0; 0), $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{15}\right)$, (1,5; 0,75);

б) пара (0; 0) не является решением системы. Разделив обе части первого уравнения на y^2, получим

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 6 = 0.$$

Пусть $\frac{x}{y} = t$. Тогда

$$t^2 + t - 6 = 0; \quad t_1 = -3; \ t_2 = 2.$$

Если $\frac{x}{y} = -3$, т. е. $x = -3y$, то

$$9y^2 - 9y^2 + 2y - 6 = 0; \quad y_1 = 3; \quad x_1 = -9.$$

Если $\frac{x}{y} = 2$, т. е. $x = 2y$, то

$$4y^2 + 6y^2 + 2y - 6 = 0; \quad 5y^2 + y - 3 = 0;$$

$$y_2 = \frac{-1-\sqrt{61}}{10}; \quad y_3 = \frac{-1+\sqrt{61}}{10}; \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{61}}{5}; \quad x_3 = \frac{-1+\sqrt{61}}{5}.$$

511. а) Пусть $\frac{x}{y} = t$, тогда $t + \frac{1}{t} = \frac{25}{12}$, $t_1 = \frac{3}{4}$, $t_2 = \frac{4}{3}$.

Если $x = \frac{4}{3}y$, то $\frac{16}{9}y^2 - y^2 = 7$; $y_1 = -3$; $x_1 = -4$; $y_2 = 3$; $x_2 = 4$.

Если $x = \frac{3}{4}y$, то $\frac{9}{16}y^2 - y^2 = 7$. Это уравнение не имеет корней;

б) пусть $\frac{x}{y} = t$, тогда $t - \frac{1}{t} = 2{,}1$; $t_1 = -\frac{2}{5}$; $t_2 = 2{,}5$.

Если $x = -\frac{2}{5}y$, то $\frac{4}{25}y^2 + y^2 = 29$; $y_1 = -5$; $x_1 = 2$; $y_2 = 5$; $x_2 = -2$.

Если $x = \frac{5}{2}y$, то $\frac{25}{4}y^2 + y^2 = 29$; $y_3 = -2$; $x_3 = -5$; $y_4 = 2$; $x_4 = 5$.

512. а) $\begin{cases} x(x+y)=6, \\ y(x+y)=3. \end{cases}$

Отсюда

$$\frac{x}{y}=2; \quad x=2y; \quad 6y^2=6;$$

$$y_1=-1; \; x_1=-2; \; y_2=1; \; x_2=2;$$

б) $\begin{cases} x(x-y)=7, \\ -y(x-y)=9. \end{cases}$

Отсюда $-\frac{x}{y}=\frac{7}{9}$; $y=\frac{-9x}{7}$. Получим

$$x\left(x+\frac{9x}{7}\right)=7; \qquad x^2=\frac{49}{16};$$

$$x_1=-\frac{7}{4}; \;\; y_1=\frac{9}{4}; \;\; x_2=\frac{7}{4}; \;\; y_2=-\frac{9}{4}.$$

513. а) Умножив обе части второго уравнения на 2 и сложив уравнения системы, получим

$$(x+y)^2=49; \quad x+y=-7 \text{ или } x+y=7.$$

Умножив обе части второго уравнения на -2 и сложив уравнения системы, получим

$$(x-y)^2=1; \quad x-y=-1 \text{ или } x-y=1.$$

Искомые значения переменных x и y найдём, решив системы уравнений:

$$\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-7, \\ x-y=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=7, \\ x-y=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-7, \\ x-y=1. \end{cases}$$

514. а) Пусть $x+y=u$, $xy=v$. Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{cases} u^2-v=7, \\ u+v=5. \end{cases}$$

Решения полученной системы: $u_1=3$, $v_1=2$ и $u_2=-4$, $v_2=9$.

Система уравнений

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases}$$

имеет два решения: $x_1=1$, $y_1=2$ и $x_2=2$, $y_2=1$.

Система уравнений

$$\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 9 \end{cases}$$

решений не имеет.

515. а) Вычтя из первого уравнения системы второе, получим $8xy = -32$; $y = -\frac{4}{x}$.

Отсюда $4x^2 - 16 + \frac{16}{x^2} = 49$; $4x^2 + \frac{16}{x^2} = 65$.

Пусть $x^2 = t$. Тогда $4t + \frac{16}{t} = 65$; $t_1 = \frac{1}{4}$; $t_2 = 16$.

Отсюда следует, что $x_1 = -\frac{1}{2}$; $y_1 = 8$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $y_2 = -8$; $x_3 = -4$; $y_3 = 1$; $x_4 = 4$; $y_4 = -1$.

ГЛАВА IV

Арифметическая и геометрическая прогрессии

§ 9. Арифметическая прогрессия

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
24	Последовательности	1 (1)
25	Определение арифметической прогрессии. Формула n-го члена арифметической прогрессии	3 (3)
26	Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии	3 (4)
	Контрольная работа № 6	1

Содержание материала

В пункте 24 учащиеся знакомятся с понятием последовательности, с которым им придётся неоднократно встречаться как в курсе алгебры 9 класса, так и в курсе математического анализа в старших классах. Вводятся понятия конечной и бесконечной последовательностей, члена последовательности и формулы n-го члена. Даётся представление о рекуррентном способе задания последовательности.

Сведения о последовательностях являются опорными при ознакомлении учащихся с понятием арифметической прогрессии. Выводится формула n-го члена арифметической прогрессии. Доказывается характеристическое свойство арифметической прогрессии: числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый её член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов.

Учащиеся знакомятся с двумя формулами суммы первых n членов арифметической прогрессии. Обе эти формулы следует знать и уметь выбирать ту из них, которой удобно пользоваться при решении конкретной задачи.

Основная цель

Основная цель изучения данного параграфа состоит в том, чтобы ввести понятия последовательности и арифметической прогрессии, познакомить учащихся с формулами n-го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии, характеристическим свойством арифметической прогрессии.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

В процессе изучения данной темы учащиеся овладевают умением находить члены некоторой последовательности, заданной формулой n-го члена или рекуррентным способом. Формируется умение учащихся применять формулы n-го члена арифметической прогрессии и суммы первых n членов при выполнении некоторых расчётов, а также в усложнённых ситуациях, связанных с решением уравнений и неравенств. В число упражнений включены задания с геометрическим и физическим содержанием, в ходе выполнения которых учащиеся убеждаются в значимости знаний и умений, приобретённых ими при ознакомлении с материалом данного параграфа.

Методический комментарий

Изучение данного параграфа начинается с введения понятия последовательности, которое является опорным при ознакомлении учащихся с арифметической и геометрической прогрессиями. Учащиеся получают представление о конечной и бесконечной последовательностях, формуле n-го члена последовательности, рекуррентном способе задания последовательности. Полезно обратить их внимание на то, что в бесконечной последовательности каждому натуральному числу ставится в соответствие определённый член последовательности, т. е. бесконечная последовательность представляет собой функцию, областью определения которой является множество натуральных чисел, а конечная последовательность, состоящая из n членов, — функцию, областью определения которой является множество первых n натуральных чисел.

Сведения о последовательностях используются при введении понятия арифметической прогрессии. Учащиеся должны знать формулу n-го члена арифметической прогрессии и уметь применять её при решении различных задач. Специальное внимание следует уделить упражнениям **581** и **582**, а также упражнению **583**, предназначенному для работы в парах. Эти упражнения убеждают учащихся в значимости приобретаемых ими знаний и умений.

В учебнике доказана справедливость следующих утверждений: каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов; если в последовательности (a_n) каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

Важно разъяснить учащимся, что тем самым доказано характеристическое свойство арифметической прогрессии.

Свойства арифметической прогрессии находят применение при выполнении упражнений **587—596**. Следует специально остановиться на упражнении **588**, где предложена задача-исследование. Решение этой задачи рекомендуется организовать в форме коллективной работы учащихся под руководством учителя. В число упражнений, рассматриваемых в классе, полезно включить задания **595** и **596**, в которых характеристическое свойство арифметической прогрессии используется в нестандартной ситуации.

Пункт 25 завершается доказательством двух важных утверждений, устанавливающих связь понятий арифметической прогрессии и линейной функции: любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида $a_n = kn + b$, где k и b — некоторые числа; последовательность (a_n), заданная формулой вида $y = kn + b$, где k и b — некоторые числа, является арифметической прогрессией. Эти свойства используются при выполнении упражнений **597** и **598**. К ним учащиеся вернутся в дальнейшем, когда будут сопоставлять расположение в координатной плоскости точек, изображающих первые несколько членов арифметической и геометрической прогрессий.

В пункте 26 девятиклассники знакомятся с двумя формулами, которые используются для вычисления суммы первых n членов арифметической прогрессии. Учащиеся должны знать обе эти формулы и уметь выбирать ту из них, которой удобно пользоваться в заданной конкретной ситуации.

В авторских примерах 1—4 представлены различные случаи применения этих формул. Интерес учащихся обычно привлекает пример 4, где показан приём подсчёта числа кружков в последовательностях треугольных, квадратных, пятиугольных чисел, которым пользовались Пифагор и его ученики.

В системе упражнений специальное внимание следует уделить заданиям **614**, **615**, убеждающим учащихся в значимости приобретаемых ими знаний и умений. Выполнение задания **615**, предназначенного для работы в парах, рекомендуется завершить коллективным обсуждением полученного результата. Интерес учащихся обычно вызывает нестандартное задание, представленное в упражнении **616**. Полезно специально остановиться на заданиях **617** и **618**, приводящих к решению неравенств.

Из дополнительных упражнений к параграфу 9 рекомендуется, при наличии времени, уделить внимание упражнениям **696**, **697**, в которых учащиеся встречаются с использованием формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии в нестандартной ситуации.

Указания к основным упражнениям учебника

567. Значение квадратного трёхчлена $n^2 - n - 20$ отрицательно, если значение n заключено между его корнями, т. е. выполняется двойное неравенство $-4 < n < 5$.

По смыслу задачи n — натуральное число, следовательно, отрицательными членами последовательности (a_n) являются четыре числа: a_1, a_2, a_3 и a_4. Из формулы $a_n = n^2 - n - 20$ находим их значения: -20, -18, -14, -8.

568. а) Последовательность (b_n) задана формулой: $b_{n+1} = b_n + 3$. Зная, что $b_1 = 10$, находим последовательно $b_2 = 13$, $b_3 = 16$, $b_4 = 19$, $b_5 = 22$;

б) последовательность (b_n) задана формулой $b_{n+1} = \frac{b_n}{2}$. Зная, что $b_1 = 40$, находим последовательно $b_2 = 20$, $b_3 = 10$, $b_4 = 5$, $b_5 = 2{,}5$.

579. а) Используя известные значения $a_1 = \frac{1}{3}$ и $a_2 = -1$, найдём разность d арифметической прогрессии (a_n):

$$d = a_2 - a_1 = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Имеем $a_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right)(n-1)$, т. е. $a_n = \frac{5}{3} - \frac{4}{3}n$.

Следовательно, $a_{10} = \frac{5}{3} - 10 \cdot \frac{4}{3} = -11\frac{2}{3}$.

581. Значения расстояний, пройденных телом в первую, вторую и последующие секунды после начала движения, представляют собой члены арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_1 = 7$, $d = 3$. Так как в арифметической прогрессии $a_8 = a_1 + 7d$, то $a_8 = 7 + 7 \cdot 3 = 28$ (м).

582. Значения скорости поезда представляют собой арифметическую прогрессию (a_n), в которой $a_1 = 0$, $d = 50$.

Чтобы найти скорость поезда в конце 20-й минуты, надо определить 21-й член этой арифметической прогрессии:

$$a_{21} = a_1 + 20d;\ a_{21} = 0 + 20 \cdot 50 = 1000 \text{ (м/мин)} = 60 \text{ (км/ч)}.$$

583. (*Для работы в парах.*) Длина отрезка A_2B_2 равна $2A_1B_1 = A_1B_1 + A_1B_1$; $A_3B_3 = 3A_1B_1 = A_1B_1 + 2A_1B_1$.

Длины отрезков A_nB_n, где n — натуральное число, образуют арифметическую прогрессию с первым членом $A_1B_1 = 1{,}5$ см и разностью $d = A_1B_1 = 1{,}5$ см. Таким образом,

$$A_5B_5 = A_1B_1 + 4A_1B_1 = 1{,}5 + 4 \cdot 1{,}5 = 7{,}5 \text{ (см)};$$
$$A_{10}B_{10} = A_1B_1 + 9A_1B_1 = 1{,}5 + 9 \cdot 1{,}5 = 15 \text{ (см)}.$$

584. г) Зная, что $x_{17} = 1$, $d = -3$ и $x_{17} = x_1 + 16d$, найдём x_1:

$$x_1 = x_{17} - 16d; \quad x_1 = 1 - 16 \cdot (-3) = 49.$$

586. а) Зная, что $c_{36} = 26$, $d = 0{,}7$ и $c_{36} = c_1 + 35d$, найдём c_1:

$$c_1 = c_{36} - 35d; \quad c_1 = 26 - 35 \cdot 0{,}7 = 1{,}5.$$

587. Пусть (a_n) — искомая арифметическая прогрессия с разностью d. Известно, что $a_1 = 5$, $a_9 = 1$. Имеем $a_9 = a_1 + 8d$. Отсюда $d = \frac{a_9 - a_1}{8}$; $\quad d = \frac{1-5}{8} = -0{,}5$.

Прогрессия имеет вид 5; 4,5; 4; 3,5; 3; 2,5; 2; 1,5; 1.

588. (*Задача-исследование.*) Предположим, что числа 20 и 35 являются членами арифметической прогрессии, первый член которой равен 12, а разность не равна 1.

Пусть число 20 является членом арифметической прогрессии с номером n, а число 35 — с номером m. Тогда

$$20 = 12 + d(n-1), \quad 35 = 12 + d(m-1).$$

Отсюда $d(n-1) = 8$, $\quad d(m-1) = 23$.

Разделив первое равенство на второе, получим $\frac{n-1}{m-1} = \frac{8}{23}$.

Пусть $n - 1 = 8k$, $m - 1 = 23k$, где k — натуральное число, не равное 1.

Имеем $n = 8k + 1$, $m = 23k + 1$.

Подставляя вместо k последовательно натуральные числа, начиная с 2, получим номера n и m членов арифметической прогрессии, равных соответственно 20 и 35.

Если $k = 2$, то $n = 17$, $m = 47$, $d = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$;

если $k = 3$, то $n = 25$, $m = 70$, $d = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ и т. д.

Следовательно, существует бесконечное множество арифметических прогрессий с первым членом 12, членами которых являются числа 20 и 35.

Если предположить, что $k = 1$, получится $n = 9$, $m = 24$, $d \cdot 8 = 8$, $d \cdot 23 = 23$, т. е. $d = 1$, что противоречит условию.

589. б) Пусть c_1 — первый член арифметической прогрессии (c_n), а d — её разность. По условию $c_{20} = 0$, $c_{66} = -92$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 + 19d = 0, \\ c_1 + 65d = -92. \end{cases}$$

Вычтя из второго уравнения системы первое, получим $46d = -92$, отсюда $d = -2$, $c_1 = -19d$, $c_1 = 38$.

591. Обозначим через (c_n) арифметическую прогрессию 2; 9; ... . Её разность d равна 7. Чтобы узнать, является ли число p членом этой прогрессии, надо решить уравнение $p = c_1 + d(n - 1)$ относительно n.

Если получится, что n — натуральное число, то $p = c_n$, если n не является натуральным числом, то $p \neq c_n$.

а) Решив относительно n уравнение $156 = 2 + 7(n - 1)$, получим $n = 23$. Значит, число 156 является 23-м членом арифметической прогрессии;

б) решив относительно n уравнение $295 = 2 + 7(n - 1)$, получим $n = 42\frac{6}{7}$, $42\frac{6}{7} \notin \boldsymbol{N}$. Значит, число 295 не является членом данной прогрессии.

593. а) Пусть (x_n) — арифметическая прогрессия, в которой $x_1 = 8{,}7$, $d = -0{,}3$. Имеем

$$x_n = 8{,}7 - 0{,}3(n - 1); \quad x_n = 9 - 0{,}3n.$$

Решив неравенство $9 - 0{,}3n \geqslant 0$, получим $n \leqslant 30$. Следовательно, первые 30 членов прогрессии неотрицательны;

б) используя результат, полученный в задании «а», находим, что члены прогрессии, начиная с 31-го, отрицательны.

595. Если a, b, c — последовательные члены арифметической прогрессии, то $b = \frac{a+c}{2}$.

Составим полусумму первого и третьего из заданных выражений:

$$\frac{(a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2)}{2} = \frac{a^2 + b(a + c) + c^2 + 2b^2}{2}.$$

Так как $b = \frac{a+c}{2}$, то $a + c = 2b$.

Возведя в квадрат обе части этого равенства, получим $4b^2 = a^2 + 2ac + c^2$, отсюда $4b^2 - ac = a^2 + ac + c^2$.

Составленная полусумма первого и третьего заданных выражений примет вид

$$\frac{a^2 + b \cdot 2b + c^2 + 2b^2}{2} = \frac{a^2 + 2b^2 + c^2 + 2b^2}{2} = \frac{4b^2 + 4b^2 - 2ac}{2} =$$
$$= 4b^2 - ac = a^2 + ac + c^2.$$

Итак, полусумма первого и третьего выражений равна второму выражению. В силу характеристического свойства арифметической прогрессии выражения $a^2 + ab + b^2$; $a^2 + ac + c^2$; $b^2 + bc + c^2$ образуют арифметическую прогрессию.

596. Так как числа a^2, b^2 и c^2 являются последовательными членами арифметической прогрессии, то $b^2 = \frac{a^2+c^2}{2}$.

Найдём сумму первой и третьей из заданных дробей:

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{a+b+b+c}{(b+c)(a+b)} = \frac{a+2b+c}{b^2+ac+bc+ab} =$$

$$= \frac{a+2b+c}{\frac{a^2+c^2}{2}+ac+bc+ab} = \frac{2(a+2b+c)}{a^2+c^2+2ac+2bc+2ab} =$$

$$= \frac{2(a+2b+c)}{(a+c)^2+2b(a+c)} = \frac{2(a+2b+c)}{(a+c)(a+2b+c)} = \frac{2}{a+c}.$$

В силу характеристического свойства арифметической прогрессии дроби $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

597. Арифметической прогрессией является последовательность (a_n), которую можно задать формулой вида $a_n = kn + b$, где k и b — некоторые числа.

Из данных последовательностей арифметическими прогрессиями являются последовательности, представленные в заданиях «а», «в», «д», «е».

598. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника вычисляется по формуле $S_n = 180°(n - 2)$, где n — число сторон многоугольника.

Эту формулу можно записать иначе:

$$S_n = 180°n - 360°,$$

т. е. она имеет вид $a_n = kn + b$, где k и b — некоторые числа. Следовательно, эта формула задаёт арифметическую прогрессию.

Разность прогрессии найдём, вычислив $S_4 - S_3$. Имеем $S_4 = 360°$, $S_3 = 180°$, $d = 180°$.

606. а) Последовательность, заданная формулой $x_n = 4n + 2$, является линейной функцией натурального аргумента, поэтому (x_n) — арифметическая прогрессия. Из условия $x_n = 4n + 2$ найдём: $x_1 = 6$.

Подставив в формулу суммы $S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}$ значения x_1 и x_n, получим

$$S_n = \frac{(6+4n+2)n}{2} = (2n+4)n.$$

Отсюда $S_{50} = 104 \cdot 50 = 5200$, $S_{100} = 204 \cdot 100 = 20\,400$.

608. а) 2; 4; 6; ...; $2n$ — арифметическая прогрессия, содержащая n членов, в которой $x_1 = 2$, $x_n = 2n$. Значит,

$$S_n = \frac{(2+2n)n}{2} = n(n+1);$$

б) 1; 3; 5; ...; $(2n-1)$ — арифметическая прогрессия, содержащая n членов, в которой $x_1 = 1$, $x_n = 2n-1$. Значит,

$$S_n = \frac{1+2n-1}{2} \cdot n = n^2.$$

609. в) Заданная последовательность имеет вид 4; 8; 12; ...; 300 или $4 \cdot 1$; $4 \cdot 2$; ...; $4 \cdot 75$. Это арифметическая прогрессия, содержащая 75 членов. Их сумма равна

$$S_{75} = \frac{4+300}{2} \cdot 75 = 152 \cdot 75 = 11400;$$

г) заданная последовательность имеет вид 7; 14; 21; ...; 126 или $7 \cdot 1$; $7 \cdot 2$; ...; $7 \cdot 18$. Это арифметическая прогрессия, содержащая 18 членов. Их сумма равна

$$S_{18} = \frac{7+126}{2} \cdot 18 = 133 \cdot 9 = 1197.$$

610. Искомая сумма равна разности $S_{30} - S_{14}$. Имеем

$$S_{30} = \frac{2a_1 + 29d}{2} \cdot 30 = (20+87) \cdot 15 = 1605;$$

$$S_{14} = \frac{2a_1 + 13d}{2} \cdot 14 = (20+39) \cdot 7 = 413;$$

$$S_{30} - S_{14} = 1605 - 413 = 1192.$$

612. Определим первый член c_1 и разность d арифметической прогрессии (c_n) из условия $c_7 = 18{,}5$, $c_{17} = -26{,}5$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 + 6d = 18{,}5, \\ c_1 + 16d = -26{,}5. \end{cases}$$

Отсюда $10d = -45$; $d = -4{,}5$; $c_1 = 18{,}5 - 6 \cdot (-4{,}5) = 45{,}5$.

С помощью формулы $S_{20} = \frac{2c_1 + 19d}{2} \cdot n$ находим, что

$$S_{20} = \frac{91 - 19 \cdot 4{,}5}{2} \cdot 20 = 5{,}5 \cdot 10 = 55.$$

613. Предварительно найдём значение разности d арифметической прогрессии (b_n), используя условие $b_1 = 4{,}2$, $b_{10} = 15{,}9$:

$$b_{10} = b_1 + 9d; \quad 15{,}9 = 4{,}2 + 9d; \quad 9d = 11{,}7; \quad d = 1{,}3.$$

Имеем

$$S_{15} = \frac{2 \cdot 4,2 + 14 \cdot 1,3}{2} \cdot 15 = (4,2 + 9,1) \cdot 15 = 199,5.$$

614. В задаче речь идёт об арифметической прогрессии с первым членом, равным 5, и разностью, равной 10. Глубина шахты равна сумме первых пяти членов этой прогрессии:

$$S_5 = \frac{2 \cdot 5 + 10 \cdot 4}{2} \cdot 5 = 125 \text{ (м)}.$$

Итак, глубина шахты равна 125 м.

615. (*Для работы в парах.*) Свободно падающее тело в первую секунду своего падения пройдёт путь 10 м ($g \approx 10$ м/с), а в каждую следующую секунду — на 10 м больше.

Имеем арифметическую прогрессию (a_n) с первым членом $a_1 = 10$ и разностью $d = 10$. В этой прогрессии:

$a_5 = a_1 + 4d = 10 + 40 = 50$ (м) — расстояние, пройденное телом за пятую секунду;

$S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{10 + 50}{2} = 150 \text{ (м)}$ — расстояние, пройденное телом за 5 с после начала падения.

616. Число всех шаров, размещённых в n рядах, — это сумма членов арифметической прогрессии с первого по n-й член включительно.

Известно, что $S_n = 120$, т. е. $\frac{n+1}{2} \cdot n = 120$. Отсюда

$$n^2 + n - 240 = 0; \quad n_1 = -16; \quad n_2 = 15.$$

Отрицательный корень не соответствует смыслу задачи. Итак, 120 шаров можно разместить указанным способом в 15 рядах.

Найдём сумму первых тридцати членов этой арифметической прогрессии:

$$S_{30} = \frac{1 + 30}{2} \cdot 30 = 31 \cdot 15 = 465.$$

Значит, чтобы составить треугольник из 30 рядов, потребуется 465 шаров.

617. В заданной арифметической прогрессии $a_1 = 3$, $d = 2$. Имеем

$$S_n = \frac{2 \cdot 3 + 2(n-1)}{2} \cdot n = n^2 + 2n.$$

Решим неравенство

$$n^2 + 2n \leqslant 120; \quad (n + 12)(n - 10) \leqslant 0; \quad -12 \leqslant n \leqslant 10.$$

Так как n должно быть натуральным числом, то наибольшее число членов прогрессии, сумма которых не превосходит 120, равно 10.

618. В заданной арифметической прогрессии $a_1 = 17$, $d = -3$. Имеем

$$S_n = \frac{34 - 3(n-1)}{2} \cdot n = \frac{(37 - 3n)n}{2}.$$

Решим неравенство

$$(37 - 3n)n > 0; \quad 37 - 3n > 0; \quad n < 12\frac{1}{3}.$$

Наибольшее число членов арифметической прогрессии, сумма которых положительна, равно 12.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

672. а) Так как $y_1 = -3$, $y_{n+1} - y_n = 10$, то $y_{n+1} = y_n + 10$. Отсюда

$$y_2 = -3 + 10 = 7; \quad y_3 = y_2 + 10 = 17;$$
$$y_4 = y_3 + 10 = 27; \quad y_5 = y_4 + 10 = 37;$$

б) так как $y_1 = 10$, $y_{n+1} \cdot y_n = 2{,}5$, то $y_{n+1} = \frac{2{,}5}{y_n}$. Отсюда

$$y_2 = \frac{2{,}5}{y_1} = \frac{2{,}5}{10} = 0{,}25; \quad y_3 = \frac{2{,}5}{y_2} = \frac{2{,}5}{0{,}25} = 10;$$

$$y_4 = \frac{2{,}5}{y_3} = \frac{2{,}5}{10} = 0{,}25; \quad y_5 = \frac{2{,}5}{y_4} = \frac{2{,}5}{0{,}25} = 10;$$

г) так как $y_1 = -4$, $y_{n+1} : y_n = -n^2$, то $y_{n+1} = -n^2 \cdot y_n$. Отсюда

$$y_2 = -1 \cdot y_1 = -1 \cdot (-4) = 4; \quad y_3 = -4 \cdot y_2 = -4 \cdot 4 = -16;$$
$$y_4 = -9 \cdot y_3 = -9 \cdot (-16) = 144; \quad y_5 = -16 \cdot y_4 = -16 \cdot 144 = -2304.$$

673. а) Исходя из значений двух известных членов a_3 и a_4 арифметической прогрессии (a_n), найдём её разность d, а затем неизвестные члены этой прогрессии. Имеем

$$d = a_4 - a_3 = -11{,}5 - (-19) = 7{,}5;$$
$$a_2 = a_3 - d = -19 - 7{,}5 = -26{,}5;$$
$$a_1 = a_2 - d = -26{,}5 - 7{,}5 = -34;$$
$$a_5 = a_4 + d = -11{,}5 + 7{,}5 = -4.$$

Прогрессия выглядит так: -34; $-26{,}5$; -19; $-11{,}5$; -4; ...;

б) зная, что $a_2 = -8{,}5$; $a_4 = -4{,}5$, найдём разность арифметической прогрессии:

$$d = \frac{a_4 - a_2}{2} = \frac{-4{,}5 + 8{,}5}{2} = 2.$$

Тогда

$$a_1 = a_2 - d = -8{,}5 - 2 = -10{,}5; \quad a_3 = a_2 + d = -8{,}5 + 2 = -6{,}5;$$
$$a_5 = a_4 + d = -4{,}5 + 2 = -2{,}5; \quad a_6 = a_5 + d = -2{,}5 + 2 = -0{,}5.$$

Прогрессия выглядит так: $-10{,}5$; $-8{,}5$; $-6{,}5$; $-4{,}5$; $-2{,}5$; $-0{,}5$; ... .

674. Обозначим длину одной стороны треугольника через x см, тогда другие его стороны $(x + d)$ см и $(x + 2d)$ см, где d — разность арифметической прогрессии. Известно, что периметр треугольника равен 24 см. Имеем

$$x + (x + d) + (x + 2d) = 24; \quad 3x + 3d = 24; \quad x + d = 8.$$

Одна из сторон треугольника равна 8 см.

Если $d = 0$, т. е. треугольник равносторонний, то каждая его сторона равна 8 см.

Пусть $d > 0$. Тогда бóльшая сторона треугольника равна $x + 2d$. Она должна быть меньше суммы двух других сторон, т. е. должно выполняться неравенство

$$x + 2d < x + (x + d).$$

Отсюда $d < x$.

Чтобы найти длины меньшей и большей из сторон треугольника, надо решить уравнение $x + d = 8$ в натуральных числах с учётом неравенства $d < x$. Подбором находим значения таких пар вида $(x; d)$: (5; 3), (6; 2), (7; 1), (8; 0).

Значит, существует четыре варианта длин сторон треугольника (в сантиметрах): 5, 8, 11; 6, 8, 10; 7, 8, 9; 8, 8, 8.

675. Пусть углы треугольника равны (в градусах) x, $x + d$, $x + 2d$. Сумма углов треугольника равна 180°, следовательно,

$$x + (x + d) + (x + 2d) = 180; \quad 3(x + d) = 180; \quad x + d = 60.$$

Один из углов треугольника, а именно средний по величине, равен 60°.

676. а) Последовательность a_2, a_4, ..., a_{2n}, ... является арифметической прогрессией, разность которой вдвое больше разности арифметической прогрессии (a_n);

б) последовательность $a_1 - 1$, $a_2 - 1$, ..., $a_n - 1$, ... является арифметической прогрессией, разность которой равна разности прогрессии (a_n);

в) по характеристическому свойству арифметической прогрессии $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$.

Выясним, выполняется ли это свойство для новой последовательности:

$$\frac{2a_{n-1}+2a_{n+1}}{2}=a_{n-1}+a_{n-1}=2a_n.$$

Следовательно, последовательность $2a_1$, $2a_2$, ..., $2a_n$, ... является арифметической прогрессией;

г) последовательность a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2, ... не является арифметической прогрессией. Приведём контрпример. Последовательность 1, 2, 3, ... n, ... — арифметическая прогрессия, а последовательность 1, 4, 9, ..., n^2 ... не является арифметической прогрессией, так как $4-1\neq 9-4$.

Заметим, что последовательность (a_n^2) является арифметической прогрессией лишь при $a_n=1$ или $a_n=0$.

679. а) Запишем формулу n-го члена для данной арифметической прогрессии:

$$a_n=2\frac{3}{4}+\frac{2}{5}(n-1).$$

Число $14\frac{3}{4}$ является членом арифметической прогрессии (a_n), если корень уравнения $14\frac{3}{4}=2\frac{3}{4}+\frac{2}{5}n-\frac{2}{5}$ является натуральным числом.

Решая это уравнение, получаем $n=31$. Значит, число $14\frac{3}{4}$ является 31-м членом этой прогрессии;

б) решим уравнение

$$8{,}35=2{,}75+0{,}4(n-1).$$

Получим $n=141$. Следовательно, число 8,35 является 141-м членом данной арифметической прогрессии.

680. б) В прогрессии $8\frac{1}{2}$; $8\frac{1}{3}$; $8\frac{1}{6}$; ... разность $d=8\frac{1}{3}-8\frac{1}{2}=$ $=-\frac{1}{6}$. Решим неравенство $a_n<0$:

$$a_n=8\frac{1}{2}-\frac{1}{6}(n-1);\quad 8\frac{1}{2}-\frac{1}{6}n+\frac{1}{6}<0;\quad \frac{1}{6}n>8\frac{2}{3};\quad n>52.$$

Первый отрицательный член этой прогрессии имеет номер 53. Он равен

$$8\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cdot 52=8\frac{1}{2}-8\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}.$$

681. б) $y_{n-5}+y_{n+10}=y_1+d(n-6)+y_1+d(n+9)=2y_1+$ $+2dn+3d$;

$y_n+y_{n+5}=y_1+d(n-1)+y_1+d(n+4)=2y_1+2dn+3d.$

Следовательно, $y_{n-5} + y_{n+10} = y_n + y_{n+5}$, где $n > 5$.

После решения этой задачи полезно провести обобщение и показать, что если y_k, y_l, y_p, y_q — члены арифметической прогрессии (y_n) и $k + l = p + q$, то верным является равенство $y_k + y_l = y_p + y_q$.

682. Пусть (x_n) — арифметическая прогрессия и d — её разность. Тогда $x_n = x_1 + d(n-1)$, $x_m = x_1 + d(m-1)$. Если $m \neq n$, то

$$x_m - x_n = d(m-1) - d(n-1) = dm - dn;$$

$$d = \frac{x_m - x_n}{m - n}.$$

Эта формула используется при выполнении задания **683**.

684. б) $d = \sqrt{12} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$. Отсюда

$$a_n = \sqrt{3} + \sqrt{3}(n-1) = n\sqrt{3};$$

$$S_{10} = \frac{\sqrt{3} + 10\sqrt{3}}{2} \cdot 10 = 55\sqrt{3}.$$

686. Рассмотрим последовательность (x_n) длин параллельных отрезков, заключённых между сторонами угла. Длину второго отрезка находим по свойству средней линии треугольника, а длины остальных отрезков — по свойству средней линии трапеции. Получим последовательность 3, 6, 9, ..., которая является арифметической прогрессией с первым членом 3 и разностью 3.

$$S_{12} = \frac{6 + 3 \cdot 11}{2} \cdot 12 = 39 \cdot 6 = 234.$$

688. Для арифметической прогрессии (x_n) известно, что $x_{10} = 1$, а $S_{16} = 4$. Выразим x_{10} и S_{16} через x_1 и d:

$$x_{10} = x_1 + 9d; \quad S_{16} = \frac{2x_1 + 15d}{2} \cdot 16 = (2x_1 + 15d) \cdot 8.$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 9d = 1, \\ 2x_1 + 15d = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Получим $x_1 = -3{,}5$, $d = 0{,}5$.

689. а) Последовательность всех двузначных чисел — арифметическая прогрессия с первым членом 10 и последним 99. Число всех двузначных чисел равно 90.

$$S_{90} = \frac{10 + 99}{2} \cdot 90 = 109 \cdot 45 = 4905;$$

б) последовательность всех трёхзначных чисел — арифметическая прогрессия с первым членом 100 и последним членом 999. Число всех трёхзначных чисел равно 900.

$$S_{900} = \frac{100+999}{2} \cdot 900 = 1099 \cdot 450 = 494\,550.$$

691. а) Чтобы найти сумму натуральных чисел, меньших 100 и не кратных 3, надо из суммы S_1 всех натуральных чисел, меньших 100, вычесть сумму S_2 натуральных чисел, меньших 100 и кратных 3.

$$S_1 = \frac{1+99}{2} \cdot 99 = 99 \cdot 50 = 4950;$$

$$S_2 = \frac{3+99}{2} \cdot 33 = 51 \cdot 33 = 1683;$$

$$S_1 - S_2 = 4950 - 1683 = 3267.$$

692. а) Числу n предшествует $(n-1)$ натуральное число. Сумма предшествующих чисел

$$S = \frac{1+n-1}{2} \cdot (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

По условию $\frac{n(n-1)}{2} = 5n$. Отсюда $n = 11$.

693. В последовательности 2; 5; 8; ...; $(3n-1)$; ... члены с чётными номерами заменили противоположными числами. Получилась последовательность 2; -5; 8; -11; ...; x_n; ..., в которой $x_n = (-1)^{n+1}(3n-1)$.

Если n — нечётное число, то $x_n > 0$, т. е. получаются члены, стоящие на нечётных местах, если n — чётное число, то $x_n < 0$, т. е. получаются члены, стоящие на чётных местах.

Сумму 50 членов полученной последовательности можно найти, сложив сумму 25 членов прогрессии, стоящих на нечётных местах (S_1), и сумму 25 членов, стоящих на чётных местах (S_2). Имеем

$$S_1 = \frac{2+146}{2} \cdot 25 = 1850;$$

$$S_2 = \frac{-5-149}{2} \cdot 25 = -1925;$$

$$S_1 + S_2 = 1850 + (-1925) = -75.$$

694. а) $\frac{x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \ldots \cdot x^n}{x \cdot x^3 \cdot x^5 \cdot \ldots \cdot x^{2n-1}} = \frac{x^{1+2+3+\ldots+n}}{x^{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}.$

Вычислим показатели степени x в числителе и знаменателе полученной дроби, применив формулу суммы членов арифметической прогрессии:

$$1+2+\ldots+n=\frac{1+n}{2}\cdot n;$$

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=\frac{1+2n-1}{2}\cdot n=n^2.$$

Имеем

$$\frac{x^{1+2+3+\ldots+n}}{x^{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}=\frac{x^{\frac{1+n}{2}\cdot n}}{x^{n^2}}=x^{\frac{n-n^2}{2}};$$

б) $$\frac{x^2\cdot x^4\cdot x^6\cdot\ldots\cdot x^{2n}}{x\cdot x^2\cdot\ldots\cdot x^n}=\frac{x^{\frac{2+2n}{2}\cdot n}}{x^{\frac{1+n}{2}\cdot n}}=x^{n+n^2-\frac{n}{2}-\frac{n^2}{2}}=x^{\frac{n+n^2}{2}}.$$

695. а) Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия, в которой $a_1=8{,}2$, $d=-0{,}8$. Выясним, сколько положительных членов содержит эта прогрессия, т. е. каков номер первого отрицательного члена.

$$a_n=8{,}2-0{,}8(n-1)=9-0{,}8n;$$

$$9-0{,}8n<0, \text{ если } n>11\frac{1}{4}.$$

Следовательно, в арифметической прогрессии (a_n) первый отрицательный член имеет номер 12. Значит, первые 11 членов положительны или равны нулю. Найдём их сумму:

$$S_{11}=\frac{2\cdot 8{,}2-0{,}8\cdot 10}{2}\cdot 11=\frac{16{,}4-8}{2}\cdot 11=4{,}2\cdot 11=46{,}2.$$

696. В арифметической прогрессии (a_n) $S_{10}=100$, следовательно, $\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10=100$. Отсюда $a_1+a_{10}=20$.

$S_{30}=900$, следовательно, $\frac{a_1+a_{30}}{2}\cdot 30=900$. Отсюда $a_1+a_{30}=60$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases}a_1+a_{10}=20,\\ a_1+a_{30}=60;\end{cases}\qquad \begin{cases}2a_1+9d=20,\\ 2a_1+29d=60.\end{cases}$$

Решив эту систему, найдём, что $a_1=1$, $d=2$.

$$S_{40}=\frac{2+2\cdot 39}{2}\cdot 40=40\cdot 40=1600.$$

697. а) Зная, что $S_{20}=\frac{2a_1+19d}{2}\cdot 20=(2a_1+19d)\cdot 10=1000$, $S_{40}=\frac{2a_1+39d}{2}\cdot 40=(2a_1+39d)\cdot 20=10000$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}(2a_1+19d)\cdot 10=1000,\\(2a_1+39d)\cdot 20=10000;\end{cases}\qquad\begin{cases}2a_1+19d=100,\\2a_1+39d=500.\end{cases}$$

Решив систему, получим $a_1=-140$, $d=20$. Тогда

$$a_{50}=-140+49\cdot 20=840.$$

698. а) $a_n=2n+1$, $a_1=3$;

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{3+2n+1}{2}\cdot n=(n+2)\,n=n^2+2n;$$

б) $a_n=3-n$, $a_1=2$; $S_n=\frac{2+3-n}{2}\cdot n=\frac{(5-n)n}{2}=\frac{5n-n^2}{2}$.

699. Преобразуем формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=a_1n+0{,}5dn^2-0{,}5dn=0{,}5dn^2+(a_1-0{,}5d)\cdot n.$$

Отсюда следует, что S_n является квадратичной функцией вида $y=ax^2+bx$, где x — натуральное число.

По условию $S_n=n^2-8n$. Сравнивая коэффициенты многочленов $0{,}5dn^2+(a_1-0{,}5d)n$ и n^2-8n, найдём значения d и a_1:

$$\begin{cases}0{,}5d=1,\\a_1-0{,}5d=-8.\end{cases}$$

Отсюда $d=2$, $a_1=-7$. Значит, $a_5=-7+4\cdot 2=1$.

Заметим, что если сумма первых n членов последовательности (x_n) является квадратичной функцией вида $S_n=an^2+bn$, где $n\in\boldsymbol{N}$, то последовательность (x_n) является арифметической прогрессией. Это можно доказать, воспользовавшись характеристическим свойством арифметической прогрессии. Для доказательства выразим x_{k-1}, x_k и x_{k+1} через a и b из формулы $S_n=an^2+bn$:

$$x_k=S_k-S_{k-1}=ak^2+bk-a(k-1)^2-b(k-1)=2ak-a+b;$$
$$x_{k-1}=2a(k-1)-a+b=2ak-3a+b;$$
$$x_{k+1}=2a(k+1)-a+b=2ak+a+b.$$

$$\frac{x_{k-1}+x_{k+1}}{2}=\frac{2ak+a+b+2ak-3a+b}{2}=\frac{4ak-2a+2b}{2}=2ak-a+b=x_k.$$

700. Опираясь на заключение, сделанное в упражнении **699**, приходим к выводу, что арифметической прогрессией является последовательность в задании «а».

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 21

9. В арифметической прогрессии (a_n) $a_2 + a_4 = 46$, $a_3 + a_7 = 58$. Выразив a_2, a_3, a_4 и a_7 через a_1 и d, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 3d = 46, \\ a_1 + 2d + a_1 + 6d = 58; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 2d = 23, \\ a_1 + 4d = 29. \end{cases}$$

Отсюда $a_1 = 17$, $d = 3$, $a_3 = a_1 + 2d = 23$.

Это задание можно выполнить другим способом: найти значение a_3, используя первое соотношение $a_2 + a_4 = 46$ и применив характеристическое свойство арифметической прогрессии:

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = \frac{46}{2} = 23.$$

11. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $(1; -2)$ и $(2; 0)$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} k + b = -2, \\ 2k + b = 0. \end{cases}$$

Отсюда $k = 2$, $b = -4$. Уравнение прямой имеет вид $y = 2x - 4$.

13. Из условия $\frac{a_5}{a_3} = \frac{7}{5}$ найдём, что $\frac{a_1 + 4d}{a_1 + 2d} = \frac{7}{5}$, где a_1 — первый член, d — разность арифметической прогрессии (a_n).

$$5a_1 + 20d = 7a_1 + 14d; \quad 2a_1 - 6d = 0; \quad a_1 = 3d.$$

Тогда $a_{16} = a_1 + 15d = 18d$; $a_7 = a_1 + 6d = 9d$.

Следовательно, $a_{16} = 2a_7$.

14. Обозначим через a среднее из этих трёх чисел, а через d разность прогрессии. Получим

$$(a - d) + a + (a + d) = 42; \quad (a - d)^2 + a^2 + (a + d)^2 = 638.$$

Из первого уравнения найдём, что $a = 14$. Второе уравнение примет вид

$$(14 - d)^2 + 196 + (14 + d)^2 = 638;$$
$$588 + 2d^2 = 638; \quad d^2 = 25; \quad d_1 = -5; \ d_2 = 5.$$

Искомые члены прогрессии: 19, 14, 9 или 9, 14, 19.

16. Разность арифметической прогрессии (a_n) равна 7, а разность арифметической прогрессии (b_n) равна 6. Выразим n-й член каждой прогрессии через её первый член и разность:

$$a_n = 1 + 7(n - 1) = 7n - 6;$$
$$b_n = 9 + 6(n - 1) = 6n + 3.$$

По условию $a_n = b_m$, т. е. $7n - 6 = 6m + 3$. Выразим отсюда n через m:

$$n = \frac{6m + 9}{7}.$$

Если $m = 2$, то $n = 3$.

При m, равном 3, 4, 5, 6, 7 и 8, число n не является натуральным.

Если $m = 9$, то $n = 9$. Следовательно, совпадают девятые члены этих прогрессий.

17. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия, в которой $a_1 = 3$, $a_3 = 3 + 2d$, $a_4 = 3 + 3d$, где d — разность прогрессии.

Предположим, что $3 + 2d = k^2$, $3 + 3d = (k + 1)^2$, $k \in \boldsymbol{N}$. Тогда

$$d = (k + 1)^2 - k^2 = 2k + 1;$$
$$a_3 = 3 + 4k + 2 = 5 + 4k; \quad a_4 = 3 + 6k + 3 = 6 + 6k.$$

Подбором находим, что a_3 и a_4 являются квадратами последовательных натуральных чисел при $k = 5$. Отсюда $a_3 = 25$, $a_4 = 36$.

Пункт 22

9. Составим разность двух соседних членов последовательности (a_n):

$$a_{n+1} - a_n = 4{,}2(n + 1) + 3 - 4{,}2n - 3 = 4{,}2.$$

Эта разность не зависит от n. Значит, последовательность (a_n) является арифметической прогрессией с разностью $d = 4{,}2$. Чтобы найти сумму её членов с 10-го по 19-й, надо из суммы первых её 19 членов вычесть сумму первых 9 членов:

$$S_{19} = \frac{14{,}4 + 4{,}2 \cdot 18}{2} \cdot 19 = (7{,}2 + 2{,}1 \cdot 18) \cdot 19 = 855;$$

$$S_9 = \frac{14{,}4 + 4{,}2 \cdot 8}{2} \cdot 9 = (7{,}2 + 2{,}1 \cdot 8) \cdot 9 = 216;$$

$$S_{19} - S_9 = 855 - 216 = 639.$$

10. Число мест в первом, втором и т. д. рядах амфитеатра составляет арифметическую прогрессию (a_n), в которой $d = 2$, $a_{10} = 30$. Из формулы $a_{10} = a_1 + 9d$ находим, что $a_1 = a_{10} - 9d$, т. е. $a_1 = 30 - 9 \cdot 2 = 12$.

Найдём сумму первых десяти членов прогрессии:

$$S_{10} = \frac{12+30}{2} \cdot 10 = 210.$$

Итак, в амфитеатре 210 мест.

11. Зная, что в арифметической прогрессии (a_n) с первым членом a_1 и разностью d $S_4 = 56$, $S_9 = 36$, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2a_1+3d}{2} \cdot 4 = 56, \\ \frac{2a_1+8d}{2} \cdot 9 = 36; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_1 + 3d = 28, \\ 2a_1 + 8d = 8. \end{cases}$$

Решив систему, получим $a_1 = 20$, $d = -4$.

14. Все последовательные двузначные числа, кратные 7, составляют арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 14$, $d = 7$, $a_n = 98$. Число таких чисел равно $\frac{98-14}{7} + 1$, т. е. равно 13.

$$S_{13} = \frac{14+98}{2} \cdot 13 = (7+49) \cdot 13 = 728.$$

§ 10. Геометрическая прогрессия

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
27	Определение геометрической прогрессии. Формула n-го члена геометрической прогрессии	3(3)
28	Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии	3(4)
	Контрольная работа № 7	1

Содержание материала

Изучение сведений о геометрической прогрессии строится по той же схеме, которая использовалась при ознакомлении учащихся с арифметической прогрессией. Вводятся понятия геометрической прогрессии, знаменателя геометрической прогрессии и формулы n-го члена геометрической прогрессии.

Учащиеся знакомятся с характеристическим свойством геометрической прогрессии, состоящим в том, что последовательность чисел, отличных от нуля, является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого её члена, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов.

Выводятся две формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Основная цель

Основная цель изучения данного параграфа состоит в том, чтобы познакомить учащихся с понятием геометрической прогрессии, с характеристическим свойством геометрической прогрессии, а также с формулами n-го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

При изучении данной темы учащиеся овладевают умением выполнять расчёты, применяя формулу n-го члена геометрической прогрессии. Они должны уметь также вычислять сумму первых n членов геометрической прогрессии, применяя ту из известных им двух формул, которая отвечает условиям конкретной задачи.

Специальное внимание следует уделить заданиям на вычисление сложных процентов. Умения, формируемые при выполнении таких заданий, имеют важное прикладное значение. В систему упражнений включены задачи с геометрическим и физическим содержанием. Подобные задачи являются для учащихся ещё одним наглядным доказательством практической значимости приобретаемых ими знаний и умений.

Методический комментарий

Сведения о геометрической прогрессии излагаются в той же последовательности, которая использовалась при ознакомлении учащихся с арифметической прогрессией. В пункте 27 они знакомятся с определением геометрической прогрессии, с понятием знаменателя геометрической прогрессии, с формулой n-го члена геометрической прогрессии. Рассматривается пример, в котором сопоставляется расположение в координатной плоскости точек, изображающих члены арифметической прогрессии 0,5; 2; 3,5; 5; ...; a_n; ..., и точек, изображающих члены геометрической прогрессии 0,5; 1; 2; 4; ...; b_n; ... . Внимание учащихся следует обратить на то, что точки, изображающие члены арифметической прогрессии, лежат на прямой и расположены на одинаковом расстоянии друг от друга, а точки, изображающие члены геометрической прогрессии, располагаются на кривой, являющейся графиком функции, задаваемой формулой вида $y = ca^x$, где $c = \frac{b_1}{q}$, $a = q$, причём с возрастанием x расстояние между соседними точками увеличивается. Это хорошо видно на приведённом в учебнике рисунке 78. Учащиеся узнают, что функция, задаваемая формулой вида $y = ca^x$, называется показательной или экспоненциальной функцией.

В учебнике доказывается справедливость следующего свойства геометрической прогрессии: квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего её членов. Учащимся предлагается самостоятельно доказать справедливость обратного утверждения: если в последовательности чисел, отличных от нуля, квадрат каждого члена, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов, то эта последовательность является геометрической прогрессией. Таким образом, учащиеся получают представление о характеристическом свойстве геометрической прогрессии.

После рассмотрения авторских примеров 1 и 2 учащиеся приступают к выполнению упражнений **623—636**.

Специальное внимание следует уделить авторскому примеру 3, где учащиеся встречаются с понятием сложных процентов, имеющим важное практическое значение. Вычисление сложных процентов используется при выполнении упражнений **637—640**. В их число входит упражнение **638**, предназначенное для работы в парах. Выполнение этого упражнения рекомендуется завершить коллективной проверкой в классе полученных результатов.

В пункте 28 учащиеся знакомятся с двумя формулами суммы первых n членов геометрической прогрессии. Изучение пункта можно начать с рассказа учителя о награде, которую хотел получить у принца изобретатель игры в шахматы. Подобные отступления позволяют расширить круг учащихся, интересующихся математикой.

Учащимся предлагаются различные задания на вычисление суммы первых n членов геометрической прогрессии. В зависимости от условия задачи они должны уметь выбрать ту из формул, которой удобно пользоваться в данном конкретном случае. Рекомендуется специально остановиться на упражнении **651**, предназначенном для работы в парах. Здесь учащиеся должны прежде всего доказать, что указанная формула задаёт геометрическую прогрессию, и только после этого находить сумму первых n членов последовательности.

Интерес учащихся обычно вызывают упражнения **655** и **657**, в которых формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии используются в усложнённых ситуациях.

Из дополнительных упражнений рекомендуется использовать задания **708—710**, в которых формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии применяются в достаточно сложных случаях.

Указания к основным упражнениям учебника

627. б) В геометрической прогрессии (b_n) известны первый и второй члены: $b_1 = -40$, $b_2 = -20$. Найдём знаменатель прогрессии:

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-20}{-40} = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$b_n = (-40)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{40\cdot 2}{2^n} = -\frac{80}{2^n}; \quad b_7 = -\frac{80}{2^7} = -\frac{80}{128} = -\frac{5}{8}.$$

629. Воспользовавшись свойством средней линии треугольника, получим

$$A_1C_1 = \frac{1}{2}AC, \quad A_2C_2 = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2^2}AC, \quad \ldots, \quad A_9C_9 = \frac{1}{2^9}AC.$$

Треугольники ABC и A_9BC_9 подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2^9}$. Следовательно,

$$S_{A_9BC_9} = k^2 S_{ABC} = \frac{1}{2^{18}} S_{ABC}, \text{ т. е.}$$

$$S_{A_9BC_9} = \frac{1}{2^{18}}\cdot 768 = \frac{2^8\cdot 3}{2^{18}} = \frac{3}{1024}.$$

Значит, площадь треугольника A_9BC_9 равна $\frac{3}{1024}$ см^2.

631. а) В геометрической прогрессии (c_n) известны пятый и седьмой члены: $c_5 = -6$, $c_7 = -54$. Имеем $c_5 = c_1q^4$, $c_7 = c_1q^6$, следовательно, $\frac{c_7}{c_5} = q^2$. Отсюда

$$q^2 = \frac{-54}{-6} = 9; \quad q_1 = -3; \; q_2 = 3.$$

633. а) В геометрической прогрессии (b_n) известны первый и третий члены: $b_1 = 125$, $b_3 = 5$. Найдём знаменатель прогрессии q из формулы $b_3 = b_1q^2$. Имеем

$$q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{5}{125} = \frac{1}{25}; \quad q_1 = -\frac{1}{5}; \ \ q_2 = \frac{1}{5}.$$

Отсюда

$$b_6 = 125 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^5 = -\frac{1}{25} \text{ или } b_6 = 125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{1}{25}.$$

634. Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия, в которой $b_1 = 2$, $b_5 = 162$. Так как $b_5 = b_1q^4$, то

$$q^4 = \frac{162}{2} = 81; \quad q_1 = -3; \ q_2 = 3.$$

Если $q = -3$, то $b_2 = -6$, $b_3 = 18$, $b_4 = -54$;
если $q = 3$, то $b_2 = 6$, $b_3 = 18$, $b_4 = 54$.

637. Выполнение этого упражнения следует начать с вывода формулы сложных процентов.

Первоначальное население города $b_1 = 60\,000$ человек, ежегодный прирост населения $p = 2\,\%$. Через год население города составит

$$b_2 = b_1 + b_1 \cdot \frac{p}{100} = b_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ (чел.)},$$

через 2 года

$$b_3 = b_2 + b_2 \cdot \frac{p}{100} = b_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \text{ (чел.)},$$

а через n лет

$$b_{n+1} = b_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Эта формула носит название формулы сложных процентов. Найдём население города через 5 лет:

$$b_6 = b_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 = 60\,000 \cdot (1 + 0{,}02)^5 \approx 66\,000 \text{ (чел.)}.$$

638. (*Для работы в парах.*) Сумму вклада через n лет найдём по формуле сложных процентов:

$$x = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

где a — величина первоначального вклада, p — ежегодный банковский процент.

По условию $a = 8000$, $p = 6\,\%$. Тогда:

а) $x = 8000 \cdot 1{,}06^4 \approx 10\,000$ (р.);

б) $x = 8000 \cdot 1{,}06^6 \approx 11\,300$ (р.).

640. После каждого движения поршня в сосуде остаётся 80 % имевшегося в нём воздуха. Чтобы узнать давление воздуха в сосуде после очередного движения поршня, нужно давление после предыдущего движения умножить на 0,8.

Получается геометрическая прогрессия (b_n), в которой $b_1 = 760$, $q = 0{,}8$.

После шести движений поршня давление воздуха в сосуде будет равным седьмому члену этой прогрессии:

$$b_7 = b_1 q^6 = 760 \cdot (0{,}8)^6 \approx 200 \text{ (мм рт. ст.)}.$$

641. Высота равностороннего треугольника со стороной a равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; значит, высота второго треугольника равна $\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $\frac{3a}{4}$, высота третьего — $\frac{3a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$ и т. д.

Последовательность a, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3a}{4}$, $\frac{3a\sqrt{3}}{8}$, ... является геометрической прогрессией с первым членом, равным a, и знаменателем, равным $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Периметры треугольников образуют последовательность (P_n):

$$3a,\ 3 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2},\ 3 \cdot \frac{3a}{4},\ 3 \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{8},\ \ldots .$$

Эта последовательность является геометрической прогрессией с первым членом $3a$ и знаменателем $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Зная, что $a = 8$, найдём:

$$P_6 = 24 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 = \frac{27\sqrt{3}}{4} \text{ (см)}.$$

643. Обозначим через x среднее из трёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, а через d — её разность. Тогда первое число равно $(x - d)$, а третье — $(x + d)$.

Известно, что сумма этих трёх чисел равна 21. Значит,

$$(x - d) + x + (x + d) = 21; \quad x = 7.$$

Геометрическую прогрессию образуют числа $x - d$, $x - 1$ и $x + d + 1$.

В силу характеристического свойства геометрической прогрессии

$$(x - 1)^2 = (x - d)(x + d + 1).$$

Подставив значение $x = 7$, получим уравнение относительно d:

$$36 = (7 - d)(8 + d); \quad d^2 + d - 20 = 0; \quad d_1 = 4, \quad d_2 = -5.$$

Получаем две тройки чисел: 3; 7; 11 и 12; 7; 2.

645. (*Задача-исследование.*) Обозначим катеты прямоугольного треугольника через a и b, а гипотенузу через c.

Пусть длины сторон треугольника a, b и c составляют геометрическую прогрессию со знаменателем q. Тогда $b = aq$, $c = aq^2$.

По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, следовательно, $(aq^2)^2 = a^2 + (aq)^2$. Отсюда $q^4 = 1 + q^2$. Для решения биквадратного уравнения $q^4 - q^2 - 1 = 0$ введём новую переменную $z = q^2$. Имеем

$$z^2 - z - 1 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения $z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Отсюда $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Итак, длины сторон прямоугольного треугольника a, b и c образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ при любом значении a.

Проверим, выполняется ли теорема Пифагора для этих значений длин сторон треугольника:

$$a^2 + b^2 = a^2 + (aq)^2 = a^2(1 + q^2) = a^2\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{a^2(3+\sqrt{5})}{2};$$

$$c^2 = a^2q^4 = a^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = a^2 \cdot \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = a^2 \cdot \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = a^2 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

648. а) Воспользуемся формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии. Получим

$$S_5 = \frac{8\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{8\left(-\frac{31}{32}\right)}{-\frac{1}{2}} = 15{,}5.$$

649. а) В геометрической прогрессии 3; −6; ... первый член равен 3, а знаменатель равен −2. Имеем

$$S_6 = \frac{3((-2)^6 - 1)}{-2-1} = \frac{3 \cdot 63}{-3} = -63;$$

г) в геометрической прогрессии 1; $-\frac{1}{2}$; ... первый член равен 1, а знаменатель равен $-\frac{1}{2}$. Имеем

$$S_6 = \frac{1 \cdot \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right)}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{64} - 1}{-\frac{3}{2}} = \frac{63 \cdot 2}{64 \cdot 3} = \frac{21}{32}.$$

651. (*Для работы в парах.*) а) В последовательности (b_n) имеем $b_n = 0{,}2 \cdot 5^n$, $b_{n+1} = 0{,}2 \cdot 5^{n+1}$. Составим отношение

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{0{,}2 \cdot 5^{n+1}}{0{,}2 \cdot 5^n} = 5.$$

Это отношение не зависит от n, следовательно, последовательность (b_n) является геометрической прогрессией со знаменателем 5, причём $b_1 = 0{,}2 \cdot 5 = 1$.

Воспользуемся формулой $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$, имеем

$$S_n = \frac{0{,}2 \cdot 5 \cdot 5^n - 1}{5 - 1} = \frac{5^n - 1}{4};$$

б) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, $b_{n+1} = 3 \cdot 2^n$;

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^{n-1}} = 2.$$

Значит, (b_n) — геометрическая прогрессия, в которой $b_1 = 3$, $q = 2$. Тогда

$$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} = 3(2^n - 1);$$

в) $b_n = 3^{1+n}$, $b_{n+1} = 3^{2+n}$;

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^{2+n}}{3^{1+n}} = 3.$$

Значит, (b_n) — геометрическая прогрессия, в которой $b_1 = 9$, $q = 3$. Тогда

$$S_n = \frac{9(3^n - 1)}{3 - 1} = 4{,}5(3^n - 1);$$

г) $b_n = 2^{n+2}$, $b_{n+1} = 2^{n+3}$;

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+3}}{2^{n+2}} = 2.$$

Значит, (b_n) — геометрическая прогрессия, в которой $b_1 = 8$, $q = 2$. Тогда

$$S_n = \frac{8(2^n - 1)}{2 - 1} = 8(2^n - 1).$$

652. в) Дана геометрическая прогрессия (c_n), в которой $c_1 = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$. Имеем

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-3} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3}.$$

Если n — чётное число, то $\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ и

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{3} = \frac{2^n - 1}{3 \cdot 2^n}.$$

Если n — нечётное число, то $\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2^n}$ и

$$S_n = \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{3} = \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n};$$

г) дана геометрическая прогрессия (c_n), в которой $c_1 = 1$, $q = -x$. Имеем

$$S_n = \frac{1((-x^n) - 1)}{-x - 1} = \frac{1 - (-x)^n}{x + 1}.$$

Если n — чётное число, то $S_n = \frac{1 - x^n}{x + 1}$;

если n — нечётное число, то $S_n = \frac{1 + x^n}{x + 1}$.

656. Для геометрической прогрессии (b_n) справедливо равенство $b_4 = b_2 q^2$, где q — знаменатель прогрессии. Из этой формулы находим, что $q^2 = \frac{54}{6} = 9$.

Из условия следует, что $q > 0$. Значит, $q = 3$; $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{6}{3} = 2$;

$$S_7 = \frac{2(3^7 - 1)}{3 - 1} = 2187 - 1 = 2186.$$

657. Для геометрической прогрессии (b_n) известно, что $b_1 + b_2 = 8$, а $b_3 + b_4 = 72$. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q = 8, \\ b_1 q^2 + b_1 q^3 = 72; \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1(1 + q) = 8, \\ b_1 q^2(1 + q) = 72, \end{cases}$$

найдём, что $q^2 = 9$. Известно, что все члены прогрессии положительны, значит, $q > 0$, т. е. $q = 3$, тогда $b_1 = \frac{8}{1+q} = 2$.

Запишем формулу суммы первых n членов этой прогрессии:

$$S_n = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1.$$

По условию $S_n = 242$. Имеем

$$3^n - 1 = 242; \quad 3^n = 243; \quad 3^n = 3^5; \quad n = 5.$$

Следовательно, чтобы получить сумму, равную 242, надо сложить первые пять членов.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

702. а) Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии (x_n). Выпишем данную последовательность в виде

$$x_1 + 1; \ x_1 q + 1; \ x_1 q^2 + 1; \ \ldots; \ x_1 q^{n-1} + 1; \ \ldots .$$

Данная последовательность является геометрической прогрессией, если отношение двух любых её соседних членов не зависит от n. Выполним преобразования:

$$\frac{x_1 q^n + 1}{x_1 q^{n-1} + 1} = \frac{x_1 q^n + q + 1 - q}{x_1 q^{n-1} + 1} = \frac{q(x_1 q^{n-1} + 1) + (1 - q)}{x_1 q^{n-1} + 1} = q + \frac{1 - q}{x_1 q^{n-1} + 1}.$$

Рассмотренное отношение не зависит от n, только если $q - 1 = 0$, т. е. при $q = 1$. Итак, данная последовательность является геометрической прогрессией при $q = 1$. Тогда она имеет вид $x_1 + 1$; $x_1 + 1$; ...; $x_1 + 1$; ... .

При $q \neq 1$ эта последовательность геометрической прогрессией не является;

г) $\dfrac{\frac{1}{x_{n+1}}}{\frac{1}{x_n}} = \dfrac{x_n}{x_{n+1}} = \dfrac{x_n}{x_n q} = \dfrac{1}{q}$ — не зависит от n, значит, данная последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем $\frac{1}{q}$.

703. Пусть a — среднее из трёх чисел, составляющих арифметическую прогрессию, а d — её разность. Тогда первое число равно $a-d$, а третье — $a+d$.

Эти числа составляют геометрическую прогрессию, если выполняется равенство $a^2=(a-d)(a+d)$. Отсюда $a^2=a^2-d^2$; $d=0$.

Значит, три числа составляют одновременно арифметическую и геометрическую прогрессии, если они равны друг другу и отличны от нуля.

704. В заданиях «а», «б» и «г» последовательность является геометрической прогрессией, так как отношения $\frac{2^{n+1}}{2^n}=2$, $\frac{3^{-n}}{3^{-n-1}}=3$ и $\frac{ab^{n+1}}{ab^n}=b$, где $a\neq0$, $b\neq0$, не зависят от n.

В задании «г» последовательность (x_n) не является геометрической прогрессией.

707. а) В геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем q имеем $b_n=b_1q^{n-1}$, $b_{n+1}=b_1q^n$.

Рассмотрим разность $b_{n+1}-b_n$:

$$b_{n+1}-b_n=b_1q^n-b_1q^{n-1}=b_1q^{n-1}(q-1)>0,$$

так как $b_1>0$ и $q>1$, т. е. последовательность (b_n) возрастающая.

708. а) $a_2\cdot a_6=a_1q\cdot a_1q^5={a_1}^2q^6$;

$a_3\cdot a_5=a_1q^2\cdot a_1q^4={a_1}^2q^6$.

Следовательно, $a_2\cdot a_6=a_3\cdot a_5$;

б) $a_{n-3}\cdot a_{n+8}=a_1q^{n-4}\cdot a_1q^{n+7}={a_1}^2q^{2n+3}$;

$a_n\cdot a_{n+5}=a_1q^{n-1}\cdot a_1q^{n+4}={a_1}^2q^{2n+3}$.

Следовательно, $a_{n-3}\cdot a_{n+8}=a_n\cdot a_{n+5}$.

Полезно обратить внимание учащихся на равенство сумм номеров рассматриваемых членов геометрической прогрессии, стоящих в левой и правой частях равенства.

Можно доказать обобщённое утверждение:

$$a_m\cdot a_n=a_k\cdot a_l,\ \text{если}\ m+n=k+l.$$

В самом деле,

$$a_m\cdot a_n=a_1q^{m-1}\cdot a_1q^{n-1}={a_1}^2q^{m+n-2},$$
$$a_k\cdot a_l=a_1q^{k-1}\cdot a_1q^{l-1}={a_1}^2q^{k+l-2};$$
$${a_1}^2q^{m+n-2}={a_1}^2q^{k+l-2},$$

так как $m+n=k+l$. Следовательно, $a_m\cdot a_n=a_k\cdot a_l$.

709. Если первый член геометрической прогрессии равен b_1, а знаменатель равен q, то $\frac{b_n}{b_m}=\frac{b_1q^{n-1}}{b_1q^{m-1}}=q^{n-m}$, т. е. $b_n=b_m\cdot q^{n-m}$.

710. а) Из формулы $S_5 = \frac{x_1(q^5-1)}{q-1}$ найдём x_1:

$$x_1 = \frac{S_5 \cdot (q-1)}{q^5-1};$$

$$x_1 = \frac{20\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right)^5-1} = \frac{\frac{61}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}{-\frac{1}{243}-1} = \frac{244\cdot 243}{9\cdot 244} = 27.$$

Тогда $x_5 = 27\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = 27\cdot\frac{1}{81} = \frac{1}{3}$;

б) из формулы $S_n = \frac{x_n q - x_1}{q-1}$ найдём q:

$$165 = \frac{88q-11}{q-1};\quad 165q - 165 = 88q - 11;\quad 77q = 154;\quad q = 2.$$

Значение n найдём, воспользовавшись формулой n-го члена геометрической прогрессии:

$$x_n = x_1 q^{n-1};\quad 88 = 11\cdot 2^{n-1};\quad 2^{n-1} = 8;\quad n = 4;$$

в) из формулы $S_n = \frac{x_1(q^n-1)}{q-1}$ найдём n:

$$\frac{21}{64} = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right)}{-\frac{1}{2}-1};\quad \frac{21}{64} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1}{-3};$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1 = -\frac{63}{64};\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{64};\quad n = 6.$$

Тогда $x_n = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{64}$;

г) из формулы n-го члена геометрической прогрессии $x_n = x_1 q^{n-1}$ выразим значение x_1 через n:

$$18\sqrt{3} = x_1\left(\sqrt{3}\right)^{n-1};\quad x_1 = \frac{18\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^n} = \frac{54}{(\sqrt{3})^n}.$$

Значение n найдём из формулы $S_n = \frac{x_n q - x_1}{q-1}$:

$$26\sqrt{3} + 24 = \frac{18\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} - \frac{54}{(\sqrt{3})^n}}{\sqrt{3}-1};$$

$$26 \cdot 3 + 24\sqrt{3} - 26\sqrt{3} - 24 = 54 - \frac{54}{(\sqrt{3})^n};$$

$$54 - 2\sqrt{3} = 54 - \frac{54}{(\sqrt{3})^n}; \quad \frac{54}{(\sqrt{3})^n} = 2\sqrt{3};$$

$$(\sqrt{3})^{n+1} = 27; \quad n + 1 = 6; \quad n = 5.$$

Тогда $x_1 = \frac{54}{(\sqrt{3})^5} = \frac{54}{9\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$

711. Найдём n-й член последовательности (x_n) как разность $S_n - S_{n-1}$. Имеем

$$S_n - S_{n-1} = \frac{3}{4}(5^n - 1) - \frac{3}{4}(5^{n-1} - 1) = \frac{3}{4}(5^n - 5^{n-1}) =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot 5^{n-1}(5 - 1) = 3 \cdot 5^{n-1}.$$

Тогда $x_{n+1} = 3 \cdot 5^n$ и отношение $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3 \cdot 5^n}{3 \cdot 5^{n-1}} = 5$ не зависит от n.

Следовательно, (x_n) — геометрическая прогрессия, знаменатель которой равен 5, а первый член равен $3 \cdot 5^0 = 3$.

712. Пусть (x_n) — геометрическая прогрессия, в которой первый член x_1 и знаменатель q. Выразим через x_1 и q сумму первых пяти членов (S_5), сумму следующих пяти членов $(S_{10} - S_5)$ и сумму оставшихся пяти её членов $(S_{15} - S_{10})$. Имеем

$$S_5 = \frac{x_1(q^5 - 1)}{q - 1}; \quad S_{10} = \frac{x_1(q^{10} - 1)}{q - 1};$$

$$S_{10} - S_5 = \frac{x_1(q^{10} - q^5)}{q - 1} = \frac{x_1 q^5(q^5 - 1)}{q - 1} = q^5 \cdot S_5;$$

$$S_{15} - S_{10} = \frac{x_1 q^{10}(q^5 - 1)}{q - 1} = q^{10} \cdot S_5.$$

Отсюда $\frac{S_{10} - S_5}{S_5} = q^5$, следовательно,

$$q^5 = \frac{-\frac{11}{2}}{\frac{11}{64}} = -32; \quad q = -2.$$

Далее имеем $S_{15} - S_{10} = (-2)^{10} \cdot S_5 = 2^{10} \cdot \frac{11}{64} = 176.$

713. а) Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия, в которой $b_1 = 1$, $q = x$, $n = 5$. Тогда $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = S_5 = \frac{1(x^5 - 1)}{x - 1} = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$;

б) пусть (b_n) — геометрическая прогрессия, в которой $b_1 = 1$, $q = -x$, $n = 7$. Тогда $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 = S_7 = \frac{1((-x)^7 - 1)}{-x - 1} = \frac{x^7 + 1}{x + 1}$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 23

10. Из свойства средней линии треугольника следует, что периметры треугольников ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ образуют геометрическую прогрессию 96, 48, 24, ..., знаменатель которой равен $\frac{1}{2}$.

$$P_{10} = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{96}{2^9} = \frac{96}{512} = \frac{3}{16}.$$

11. Из формулы n-го члена геометрической прогрессии (b_n) найдём её знаменатель:

$$q = \frac{30}{10} = 3,$$

тогда $b_n = 3\frac{1}{3} \cdot 3^{n-1}$. Решим неравенство

$$3\frac{1}{3} \cdot 3^{n-1} > 1000; \quad \frac{10}{3} \cdot 3^{n-1} > 1000; \quad 3^{n-2} > 100.$$

Это неравенство справедливо при $n - 2 > 4$, т. е. при $n > 6$.

Члены геометрической прогрессии, начиная с седьмого, больше 1000.

12. Пусть в геометрической прогрессии (b_n) $b_1 = 3$, $b_7 = 192$.

а) Рассмотрим случай, когда все члены прогрессии положительны, т. е. $q > 0$, $b_7 = b_1q^6$. Отсюда $q^6 = \frac{192}{3} = 64$; $q = 2$.

Между числами 3 и 192 расположены числа 6, 12, 24, 48 и 96;

б) если в прогрессии чередуются положительные и отрицательные числа, то $q = -2$. Между числами 3 и 192 расположены числа -6, 12, -24, 48 и -96.

15. Пусть первый член геометрической прогрессии (b_n) равен b_1, а знаменатель равен q. Тогда $b_1 + b_4 = 112$, $b_2 + b_3 = 48$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} b_1 + b_1q^3 = 112, \\ b_1q + b_1q^2 = 48; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1(1+q^3) = 112, \\ b_1q(1+q) = 48. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение системы на второе, получим

$$\frac{1+q^3}{q(1+q)} = \frac{112}{48}.$$

Отсюда

$$\frac{(1+q)(1-q+q^2)}{q(1+q)} = \frac{112}{48}; \quad 48(1-q+q^2) = 112q;$$

$$3q^2 - 10q + 3 = 0; \quad q_1 = \frac{1}{3}, \quad q_2 = 3.$$

Если $q = \frac{1}{3}$, то $b_1 = \dfrac{48}{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}} = 108$. Тогда искомые числа — 108, 36, 12 и 4.

Если $q = 3$, то $b_1 = \dfrac{48}{3\cdot 4} = 4$; искомые числа 4, 12, 36 и 108.

16. Обозначим среднее из трёх чисел, составляющих арифметическую прогрессию, через a, а разность прогрессии через d. Тогда первое из трёх чисел равно $(a - d)$, а третье равно $(a + d)$. Имеем

$$(a-d) + a + (a+d) = 75; \quad a = 25.$$

Первое число равно $25 - d$, второе равно 25, третье $25 + d$.

Геометрическую прогрессию образуют числа $25 - d - 5$, $25 + 5$ и $25 + d + 30$, т. е. числа $20 - d$, 30 и $55 + d$.

По характеристическому свойству геометрической прогрессии должно быть верным равенство $30^2 = (20 - d) \times (55 + d)$. Отсюда

$$900 = 1100 - 35d - d^2; \quad d^2 + 35d - 200 = 0; \quad d_1 = -40; \quad d_2 = 5.$$

Искомые числа 65, 25 и −15 или 20, 25 и 30.

Пункт 24

9. Найдём знаменатель q данной геометрической прогрессии из формулы $b_3 = b_1q^2$, зная, что $b_1 = \frac{1}{8}$, $b_3 = \frac{1}{2}$:

$$q^2=\frac{b_3}{b_1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}}=4.$$

Отсюда $q=2$ или $q=-2$.

а) При $q=2$ имеем

$$S_8=\frac{\frac{1}{8}(2^8-1)}{2-1}=\frac{1}{8}(256-1)=\frac{255}{8}=31\frac{7}{8};$$

б) при $q=-2$ имеем

$$S_8=\frac{\frac{1}{8}((-2)^8-1)}{-2-1}=\frac{\frac{1}{8}(256-1)}{-3}=-\frac{255}{3\cdot 8}=-\frac{85}{8}=-10\frac{5}{8}.$$

10. Известно, что для геометрической прогрессии (b_n) с первым членом b_1 и знаменателем q верно равенство $\frac{b_1+b_2}{b_2+b_3}=2.$

Преобразуем левую часть этого равенства:

$$\frac{b_1+b_2}{b_2+b_3}=\frac{b_1+b_1q}{b_1q+b_1q^2}=\frac{q+1}{q(q+1)}=\frac{1}{q}.$$

Следовательно, $\frac{1}{q}=2,\quad q=\frac{1}{2}.$

По условию $S_3=10{,}5$; $S_3=\frac{b_1(q^3-1)}{q-1}$, т. е. $10{,}5=\frac{b_1\left(\frac{1}{8}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}.$

Отсюда $b_1=\frac{10{,}5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{7}{8}}=6.$

Тогда

$$S_8=\frac{6\left(\left(\frac{1}{2}\right)^8-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=\frac{6\left(\frac{1}{256}-1\right)}{-\frac{1}{2}}=\frac{6\cdot 255\cdot 2}{256}=11\frac{61}{64}.$$

12. В геометрической прогрессии (b_n) с первым членом b_1 и знаменателем q справедливы равенства $b_7-b_5=48$, $b_6+b_5=48$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases}b_5q^2-b_5=48,\\ b_5q+b_5=48;\end{cases}\qquad \begin{cases}b_5(q^2-1)=48,\\ b_5(q+1)=48.\end{cases}$$

Отсюда $q-1=1$, т. е. $q=2$, $b_5=\frac{48}{3}=16$. Но $b_5=b_1q^4$, следовательно, $b_1=\frac{16}{2^4}=1$.

Известно, что $S_n=1023$, т. е.

$$1023=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}.$$

Отсюда

$$2^n-1=1023;\quad 2^n=1024;\quad 2^n=2^{10};\quad n=10.$$

Для тех, кто хочет знать больше

Пункт 29. Метод математической индукции

Методический комментарий

В данном пункте учащиеся, интересующиеся математикой, знакомятся с принципиально новым для них методом доказательства некоторых утверждений, называемым методом математической индукции. Они выполняют различные упражнения, в которых метод математической индукции применяется в задачах на суммирование, делимость, переход от задания последовательности рекуррентным способом к заданию её формулой n-го члена и др.

Ознакомление учащихся с методом математической индукции имеет важное общеобразовательное значение. Оно не только дополняет запас известных учащимся приёмов доказательства математических утверждений, но и способствует развитию их алгоритмической культуры. В ходе выполнения упражнений учащимся приходится отказаться от сложившихся стереотипов, когда целое выражение преобразуется либо в многочлен стандартного вида, либо в произведение некоторых многочленов, и действовать иначе — приводить выражение к такому виду, который позволяет сделать заключение по индукции. Отыскание принципиально новых способов решения задач способствует развитию гибкости мышления учащихся.

Изучению данного пункта рекомендуется посвятить два занятия математического кружка. На первом занятии учитель может познакомить учащихся с методом математической индукции как принципиально новым методом доказательства некоторых утверждений, ввести понятие принципа математической индукции. Для разъяснения смысла вводимых понятий можно использовать приведённый в учебнике пример, в котором рассматривается переход от рекуррентного способа задания последовательности к заданию этой последовательности формулой n-го члена. После этого два члена кружка могут выступить с подготовленными сообщениями. Один из них может познакомить членов кружка с применением метода математической индукции при доказательстве справедливости выведенной Архимедом формулы, рассмотренной в авторском примере 1, а другой — с рассмотренной в примере 2 задачей на делимость. На следующем занятии члены кружка могут приступить к выполнению некоторых из упражнений **662—669**.

Указания к упражнениям из учебника

662. При $n = 1$ формула верна, так как $1^3 = \frac{1 \cdot 2^2}{4}$.

При $n = 2$ формула верна, так как $1^3 + 2^3 = 9$ и $\frac{4 \cdot 3^2}{4} = 9$.

При $n = 3$ формула верна, так как $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ и $\frac{3^2 \cdot 4^2}{4} = 36$.

Предположим, что формула верна для $n = k$, т. е.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4},$$

и докажем её справедливость для $n = k + 1$, т. е. докажем, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Имеем

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

В силу принципа математической индукции утверждение доказано.

663. Проверим справедливость формулы для $n = 1$.

$$1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

Формула верна.

Предположим, что формула верна для $n = k$, т. е.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2),$$

и докажем её справедливость для $n = k + 1$, т. е. что

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$$

Имеем

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2) =$$

$$= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)\left(\frac{1}{3}k+1\right) =$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$$

В силу принципа математической индукции утверждение доказано.

664. Проверим справедливость формулы для $n = 1$.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}.$$

Формула верна.

Предположим, что формула верна для $n = k$, т. е.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1},$$

и докажем, что она верна для $n = k + 1$, т. е. что

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Имеем

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

В силу принципа математической индукции утверждение доказано.

Справедливость этой формулы можно доказать, не обращаясь к методу математической индукции.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

665. Проверим справедливость равенства при $n = 1$:

$$1 \cdot 4 = 1(1 + 1)^2.$$

Равенство верно.

Предположим, что равенство верно при $n = k$, т. е.

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + ... + k(3k + 1) = k(k + 1)^2,$$

и докажем его справедливость при $n = k + 1$, т. е. что

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + ... + k(3k + 1) + (k + 1)(3k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2.$$

Имеем

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + k(3k + 1) + (k + 1)(3k + 4) =$$
$$= k(k + 1)^2 + (k + 1)(3k + 4) = (k + 1)(k^2 + k + 3k + 4) =$$
$$= (k + 1)(k^2 + 4k + 4) = (k + 1)(k + 2)^2.$$

В силу принципа математической индукции утверждение доказано.

666. Утверждение верно при $n = 1$, так как $b_1 = 3 \cdot 1 - 6 = -3$.

Предположим, что оно верно для $n = k$, т. е. $b_k = 3k^2 - 6$, докажем его справедливость для $n = k + 1$, т. е. докажем, что $b_{k+1} = 3(k + 1)^2 - 6$.

По рекуррентному соотношению

$$b_{k+1} = b_k + 6k + 3 = 3k^2 - 6 + 6k + 3 = 3k^2 + 6k + 3 - 6 =$$
$$= 3(k + 1)^2 - 6.$$

В силу принципа математической индукции утверждение доказано.

667. Формула $a_n = 5n^2 - 10$ верна при $n = 1$, так как $a_1 = 5 \cdot 1 - 10 = -5$.

Предположим, что формула верна для $n = k$, т. е. что $a_k = 5k^2 - 10$, и докажем её справедливость для $n = k + 1$, т. е. докажем, что $a_{k+1} = 5(k + 1)^2 - 10$.

По условию

$$a_{k+1} = a_k + 10k + 5 = 5k^2 - 10 + 10k + 5 = 5k^2 + 10k + 5 - 10 =$$
$$= 5(k + 1)^2 - 10.$$

В силу принципа математической индукции утверждение доказано.

668. При $n = 1$ разность $49^n - 1 = 49 - 1 = 48$ кратна 48.

Предположим, что при $n = k$ верно равенство $49^k - 1 = 48t$, где t — некоторое натуральное число, и докажем, что разность $49^{k+1} - 1$ также кратна 48.

$$49^{k+1} - 1 = 49 \cdot 49^k - 1 = 49(48t + 1) - 1 = 48t \cdot 49 + 49 - 1 =$$
$$= 48 \cdot (49t + 1).$$

Это число кратно 48.

В силу принципа математической индукции утверждение доказано.

669. а) Покажем сначала, что данное равенство верно для $n = 1$. Имеем $u_1 = u_2 = 1$. Допустим теперь, что указанное свойство справедливо для $n = k$, т. е. $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2k-1} = u_{2k}$.

Докажем, что в этом случае оно верно для $n = k + 1$, т. е.

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2k+1} = u_{2k+2}.$$

Имеем

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2k-1} + u_{2k+1} = u_{2k} + u_{2k+1}.$$

По определению последовательности чисел Фибоначчи $u_{2k} + u_{2k+1} = u_{2k+2}$.

Утверждение доказано;

б) покажем сначала, что данное равенство верно для $n = 1$. Имеем

$$u_1^2 = 1, \quad u_1 \cdot u_2 = 1, \text{ т. е. } u_1^2 = u_1 \cdot u_2.$$

Предположим теперь, что указанное свойство справедливо для $n = k$, т. е.

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2 = u_k \cdot u_{k+1}.$$

Докажем, что оно справедливо и для $n = k + 1$, т. е. что

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{k+1}^2 = u_{k+1} \cdot u_{k+2}.$$

Имеем

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2 + u_{k+1}^2 = u_k \cdot u_{k+1} + u_{k+1}^2 = u_{k+1}(u_k + u_{k+1}).$$

По определению последовательности чисел Фибоначчи $u_k + u_{k+1} = u_{k+2}$.

Утверждение доказано.

ГЛАВА V

Элементы комбинаторики и теории вероятностей

§ 11. Элементы комбинаторики

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
30	Примеры комбинаторных задач	2 (2)
31	Перестановки	2 (2)
32	Размещения	2 (3)
33	Сочетания	3 (4)

Содержание материала

В данном параграфе учащиеся знакомятся с задачами, при решении которых приходится составлять различные комбинации элементов, подсчитывать число возможных вариантов таких комбинаций. Вводятся понятия «перебор возможных вариантов», «дерево возможных вариантов». Учащиеся узнают о комбинаторном правиле умножения, учатся применять это правило при подсчёте числа возможных способов выбора k элементов из заданных n элементов. Тем самым закладывается база для ознакомления учащихся с понятиями «перестановки», «размещения» и «сочетания».

Изучение сведений о перестановках, размещениях и сочетаниях строится по единой схеме. Рассматривается пример, в котором представлена данная конкретная комбинация, даётся определение этой комбинации, выводится соответствующая формула. Учащиеся выполняют различные упражнения, в которых эта формула находит применение.

Основная цель

Основная цель изучения данного параграфа состоит в том, чтобы ознакомить учащихся с понятиями «перестановки», «размещения», «сочетания» и соответствующими формулами для нахождения их числа, выработать умение учащихся решать несложные комбинаторные задачи.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

Изучение данного параграфа начинается с формирования умения учащихся решать несложные комбинаторные задачи, составляя некоторые комбинации элементов и подсчитывая число возможных вариантов. Они овладевают умением применять комбинаторное правило умножения при решении конкретных задач. Учащиеся должны усвоить определения понятий «перестановка», «размещение», «сочетание», запомнить формулы для вычисления числа перестановок, размещений, сочетаний, уметь применять эти формулы при решении конкретных задач.

Методический комментарий

Ознакомление с начальными сведениями из комбинаторики обычно вызывает интерес у учащихся. Занимательность сюжетов многих задач и достаточная простота выполняемых преобразований обычно привлекают даже слабых учащихся к активному участию в учебном процессе.

Изучение параграфа 11 «Элементы комбинаторики» начинается с пункта 30 «Примеры комбинаторных задач», при изучении которого учащимся приходится составлять различные комбинации элементов и подсчитывать число таких комбинаций. С простейшей комбинаторной задачей учащиеся знакомятся в авторском примере 1. После рассмотрения этого примера можно перейти к выполнению упражнений **714—717**, распределив их между классной и домашней работой. Далее учащиеся могут приступить к выполнению упражнения **718**, предназначенного для работы в парах. По окончании работы пар полезно обсудить с учащимися, в чём состоит принципиальное различие случаев, представленных в заданиях «а» и «б». На этом и последующем уроках учащиеся знакомятся с авторскими примерами 2 и 3, с построением дерева возможных вариантов, а также с комбинаторным правилом умножения. В классе и дома они выполняют упражнения **719—728**. В процессе выполнения упражнений учащиеся начинают понимать структуру различных комбинаций, а также усваивают способы подсчёта числа возможных вариантов.

В пунктах 31—33 вводятся понятия перестановки, размещения и сочетания. Простейшими комбинациями, с которыми знакомятся учащиеся, являются перестановки. Даётся соответствующее определение и выводится формула $P_n = n!$, которая используется для подсчёта числа всевозможных перестановок из n элементов. Важно обратить внимание учащихся на авторские примеры 1—3, в которых используется эта формула. Пример 1 связан с непосредственным подсчётом числа перестановок. В примерах 2 и 3 представлены более сложные случаи. В примере 2 для ответа на вопрос задачи вычисляется разность $P_4 - P_3$, а в примере 3 — произведение $P_6 \cdot P_4$.

При выполнении упражнений **732—746** учащиеся должны правильно определить, значение какого выражения им предстоит вычислить. Специальное внимание следует уделить задаче-исследованию **741**, при решении которой учащиеся должны в каждом случае учитывать особенность описанной ситуации. Важно также специально остановиться на достаточно сложном упражнении **746**, предназначенном для работы в парах.

В формуле числа перестановок учащиеся впервые встречаются с записью вида $n!$. Подобные записи используются в дальнейшем в формулах числа размещений и числа сочетаний. Для того чтобы учащиеся смогли в дальнейшем свободно работать с этими формулами при решении задач, рекомендуется уделить специальное внимание упражнениям **746—750**.

Следующим видом комбинации элементов являются размещения. Учащиеся должны запомнить соответствующее определение. Важно обратить их внимание на то, что два размещения по k элементов, взятых из данных n элементов, считаются различными, если выполняется хотя бы одно из условий — выбранные совокупности различаются самими элементами или порядком расположения этих элементов.

Применение комбинаторного правила умножения позволяет получить формулу для подсчёта числа размещений из n элементов по k, где $k < n$:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ где } k < n.$$

Делается важная оговорка, что эта формула верна и в том случае, когда $n = k$, если считать по определению, что $0! = 1$.

На изучение пункта 32 отводится два урока. Первый из них посвящается введению понятия размещения, выводу формулы числа размещений из n элементов по k при $k < n$ и ознакомлению учащихся с авторским примером 1. После этого учащиеся приступают к выполнению в классе и дома упражнений **754—758**. На следующем уроке учащиеся знакомятся с авторским примером 2, в котором формула числа размещений применяется в усложнённой ситуации. Им можно предложить выполнить в классе или дома оставшиеся в пункте 32 упражнения, а также упражнения **844**, **853**, **854**, включённые в число дополнительных упражнений к параграфу 11.

В пункте 33 учащиеся знакомятся с ещё одной комбинацией элементов — сочетаниями. Они должны запомнить определение понятия сочетания и формулу, которая используется для вычисления числа сочетаний из n элементов по k при любом $k \leqslant n$. Важно обратить внимание учащихся на различие таких комбинаций из n элементов по k, как размещения и сочетания. Два размещения, содержащие по k элементов, взятых из данных n элементов, различны, если они отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком элементов. Для сочетаний порядок элементов несущественен. Два сочетания, составленные из m элементов по n элементов, считаются различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

На изучение пункта 33 отводится три урока. На первом из них можно ввести понятие «сочетание», познакомить учащихся с авторским примером 1 и предложить им выполнить в классе или дома упражнения **768—772**. Рекомендуется уделить внимание заданию **772**, предназначенному для работы в парах, завершив его выполнение коллективным обсуждением ответов, полученных при работе пар. На следующем уроке можно познакомить учащихся с авторским примером 2 и предложить выполнить упражнения **773—775**, а также некоторые из дополнительных упражнений **841—843**, **845**. Третий урок, отводимый на изучение пункта 33, можно посвятить выполнению учащимися некоторых из упражнений **776—782**. Ценность этого блока упражнений состоит в том, что в нём представлены различные комбинации элементов — перестановки, размещения и сочетания. Таким образом, вид рассматриваемой комбинации не подсказывается самим названием пункта, а должен быть определён учащимися на основе анализа конкретной ситуации.

На этапе заключительного повторения рекомендуется использовать некоторые из дополнительных упражнений к параграфу 11.

Указания к основным упражнениям учебника

714. Обозначим первой заглавной буквой название блюда: Б — борщ, Р — рассольник, Г — гуляш и т. д. Составим множество пар, в которых на первом месте название первого блюда, на втором — название второго блюда. Получим

(Б; Г), (Б; К), (Б; С), (Б; П), (Р; Г), (Р; К), (Р; С), (Р; П).

715. Имена подруг Ирины обозначим первыми буквами: В, З, М, П и С. Возможны следующие комбинации:

ВЗ, ВМ, ВП, ВС, ЗМ, ЗП, ЗС, МП, МС и ПС.

Число возможных вариантов равно 10.

717. В условии задачи предполагается, что все яблоки различны. Обозначим яблоки цифрами 1, 2 и 3. В первую вазу яблоки можно положить так: 1) оставить вазу пустой (один способ); 2) положить в вазу одно яблоко: 1-е, 2-е или 3-е (три способа); 3) положить в неё два яблока: 1-е и 2-е, 1-е и 3-е или 2-е и 3-е (три способа); 4) положить в неё все три яблока (один способ).

Таких способов 8: $1 + 3 + 3 + 1$.

718. (*Для работы в парах.*) Из указанных цифр можно составить следующие двузначные числа:

а) 16, 18, 61, 68, 81, 86;

б) 30, 34, 40, 43.

В задании «а» шесть двузначных чисел, в задании «б» четыре числа. Основное различие заданий состоит в том, что во второе задание входит цифра 0, которая не может стоять на первом месте двузначного числа.

720. Возможны 18 способов:

204, 206, 240, 246, 260, 264, 402, 406, 420,
426, 460, 462, 602, 604, 620, 624, 640, 642.

721. Каждый шахматист сыграл с каждым из остальных шахматистов 8 партий. Всего шахматистов было 9. Значит, всего было сыграно $\frac{9 \cdot 8}{2} = \mathbf{36}$ партий. Произведение $9 \cdot 8$ необходимо разделить на 2, так как иначе партия, сыгранная каждыми двумя участниками между собой, будет учитываться дважды.

722. Каждая команда сыграла на своём поле с каждой другой командой $\frac{12 \cdot 11}{2} = \mathbf{66}$ матчей и столько же — на чужом поле.

Всего было сыграно $66 \cdot 2 = 132$ матча.

724. Каждый из 24 учащихся класса должен подготовить 23 фотографии. Следовательно, общее число фотографий должно быть равно $24 \cdot 23 = 552$.

725. Из данных цифр можно составить 10 кодов, начинающихся цифрой 0:

$$0 - 0,\ 0 - 1,\ \ldots,\ 0 - 9.$$

Аналогично можно составить 10 кодов, начинающихся цифрой 1:

$$1 - 0,\ 1 - 1,\ \ldots,\ 1 - 9$$

и т. д. Так как в качестве первой цифры можно взять любую из 10 цифр, то общее число возможных кодов равно $10 \cdot 10$, т. е. 100. Следовательно, кодов хватит для всех 96 квартир.

726. Из села Дятлово в село Матвеевское можно выбрать маршрут тремя способами, из села Матвеевское в село Першино — четырьмя способами. Следовательно, по комбинаторному правилу умножения маршрут из села Дятлово в село Першино можно выбрать двенадцатью способами.

727. Первое блюдо можно выбрать тремя способами, второе — пятью способами, третье — двумя способами. Применив комбинаторное правило умножения, получим, что число способов выбора обеда равно $3 \cdot 5 \cdot 2$, т. е. 30.

736. Наибольшее число вариантов, которые придётся перебрать Ольге, чтобы дозвониться подруге, равно числу перестановок из цифр 5, 7 и 8, т. е. $P_3 = 3! = 6$.

737. б) Из числа всех шестизначных чисел, каждая цифра которых используется один раз, т. е. из P_6, следует вычесть P_5 перестановок, так как первой цифрой не может быть 0. Имеем

$$P_6 - P_5 = 6! - 5! = 5! \cdot (6 - 1) = 120 \cdot 5 = 600.$$

738. а) Число четырёхзначных чисел, составленных без повторения цифр из цифр 3, 5, 7, 9, начинающихся с цифры 3, равно $P_3 = 3! = 6$;

б) кратными 15 являются числа, которые оканчиваются цифрой 5 и при этом сумма цифр которых кратна 3.

Так как $3 + 5 + 7 + 9 = 24$, т. е. сумма данных цифр кратна 3, то число чисел, кратных 15, равно числу чисел, оканчивающихся цифрой 5. Число таких чисел равно числу перестановок из цифр 3, 7, 9, т. е. равно 6.

739. Из цифр 1, 3, 5, 7 можно составить 24 четырёхзначных числа, так как $P_4 = 4! = 24$. У каждого из них сумма цифр равна $1 + 3 + 5 + 7$, т. е. 16. Значит, сумма цифр всех таких чисел равна $16 \cdot 24 = 384$.

740. а) Числа, бóльшие 3000, должны начинаться цифрой 3 или цифрой 4. Таких чисел $3! + 3!$, т. е. 12;

б) числа, бóльшие 2000, должны начинаться или с цифры 2, или с цифры 3, или с цифры 4. Таких чисел $3! \cdot 3$, т. е. 18.

741. (*Задача-исследование.*) а) Если мальчики располагаются в произвольном порядке, то число возможных комбинаций равно P_7, т. е. 5040;

б) если Олег должен стоять в начале ряда, а Игорь — в конце, то число возможных комбинаций равно числу способов, которыми между ними можно расположить пять остальных мальчиков, т. е. $P_5 = 120$;

в) если Олег и Игорь должны стоять рядом в произвольном порядке, то число возможных способов расположения пары Олег — Игорь и остальных пяти мальчиков равно P_6, т. е. 720. Но Олег и Игорь могут меняться местами, следовательно, всего число способов расположения мальчиков равно $720 \cdot 2$, т. е. 1440;

г) в этом случае число возможных комбинаций равно P_6, т. е. 720.

742. Сначала сдвоенный урок математики будем рассматривать как один элемент. Тогда расписание уроков можно составить 120 способами, так как $P_5 = 120$. Алгебру и геометрию можно поменять местами, следовательно, число возможных способов составления расписания равно $120 \cdot 2$, т. е. 240.

743. Считая стоящие рядом буквы «к», «о», «н» одним элементом, найдём число перестановок из трёх элементов. Значит, получится 6 перестановок.

744. Если рассматривать сборники стихов как один элемент, то число элементов будет равно 8, а число возможных комбинаций будет равно $P_8 = 8!$, т. е. 40 320. Поскольку сборники стихов можно менять местами 120 способами ($P_5 = 120$), то общее число возможных комбинаций равно $40\,320 \cdot 120 = 4\,838\,400$.

745. Число способов, которыми могут сесть мальчики и девочки в один ряд в произвольном порядке, равно P_{10}, т. е. 3 628 800.

Число способов, которыми мальчики могут сесть на нечётные места ряда, равно P_5. Столькими же способами могут сесть девочки на чётные места. Каждому способу рассаживания мальчиков соответствует P_5 способов рассаживания девочек. Значит, общее число способов равно $P_5 \cdot P_5$, т. е. равно 14 400.

746. (*Для работы в парах.*) а) Число 30! делится на 92, так как $92 = 23 \cdot 4$, а числа 23 и 4 входят в качестве множителей в произведение, равное 30!;

б) число 30! не делится на число 94, так как $94 = 2 \cdot 47$, а простого числа 47 нет среди множителей в произведении 30!;

в) число 30! делится на число 96, так как $96 = 4 \cdot 24$ и оба эти числа входят в качестве множителей в произведение 30!;

г) число 30! делится на число 98, так как $98 = 7 \cdot 14$ и оба этих числа входят в качестве множителей в произведение 30!.

747. а) Число 14! делится на 168, так как $168 = 3 \cdot 7 \cdot 8$ и эти три множителя входят в произведение 14!;

б) число 14! не делится на число 136, так как $136 = 8 \cdot 17$, а простого числа 17 нет среди множителей произведения 14!;

в) число 14! делится на число 147, так как $147 = 3 \cdot 7^2$, а произведение 14! содержит множители 3, 7 и 14;

г) число 14! делится на число 132, так как $132 = 12 \cdot 11$ и эти множители входят в произведение 14!.

748. б) $\frac{8!}{10!} = \frac{8!}{8! \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{90}$; г) $\frac{16!}{14! \cdot 3!} = \frac{14! \cdot 15 \cdot 16}{14! \cdot 2 \cdot 3} = 40$;

д) $\frac{28!}{4! \cdot 26!} = \frac{26! \cdot 27 \cdot 28}{26! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 31\frac{1}{2}$.

750. а) Разделив произведение $6! \cdot 5$ на произведение $5! \cdot 6$, получим

$$\frac{6! \cdot 5}{5! \cdot 6} = \frac{6! \cdot 5}{6!} = 5.$$

Следовательно, первое произведение больше второго в 5 раз;

б) разделив $(n+1)! \cdot n$ на $n! \cdot (n+1)$, получим

$$\frac{(n+1)! \cdot n}{n! \cdot (n+1)} = \frac{(n+1)! \cdot n}{(n+1)!} = n.$$

Следовательно, первое произведение больше второго в n раз.

755. Число способов, которыми можно выбрать председателя и секретаря из 30 человек, равно числу размещений из 30 элементов по 2:

$$A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870.$$

760. а) $A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 5 \cdot 6 = 30$; б) $A_6^4 = \frac{6!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$;

в) $A_6^6 = P_6 = 6! = 720$.

761. Обозначить различными латинскими буквами пять точек можно A_{26}^5 способами:

$$A_{26}^5 = \frac{26!}{21!} = 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 = 7\,893\,600.$$

762. б) Из пяти цифр, отличных от нуля, можно составить A_5^4 четырёхзначных числа, в которых цифры не повторяются. Цифра 0 не может стоять на первом месте, поэтому из данных цифр можно составить $A_5^4 - A_4^4$ четырёхзначных чисел. Имеем

$$A_5^4 - A_4^4 = \frac{5!}{1!} - 4! = 120 - 24 = 96.$$

763. Число способов, которыми можно составить семизначные числа с неповторяющимися цифрами, первая цифра которых отлична от нуля, равно $A_{10}^7 - A_9^6$:

$$A_{10}^7 - A_9^6 = \frac{10!}{3!} - \frac{9!}{3!} = \frac{9! \cdot 10 - 9!}{3!} = 9! \cdot \frac{3}{2} = 544\,320.$$

764. а) Чётными числами, составленными из цифр 1, 2, 3, 4, 5, являются числа, оканчивающиеся на 2 или на 4. Число трёхзначных чисел, оканчивающихся на 2, равно A_4^2; число трёхзначных чисел, оканчивающихся на 4, также равно A_4^2. Следовательно, число чётных чисел равно

$$A_4^2 + A_4^2 = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 24;$$

б) числами, кратными 5, составленными из цифр 1, 2, 3, 4, 5, являются числа, оканчивающиеся цифрой 5. Их число равно A_4^2, т. е. 12.

768. Для участия в олимпиаде можно выбрать двух участников из семи C_7^2 способами:

$$C_7^2 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5! \cdot 2} = 21.$$

Здесь речь идёт о сочетаниях элементов, так как порядок элементов не важен.

769. Все наборы отличаются друг от друга хотя бы одной маркой. Следовательно, число способов, которыми можно выбрать три набора из имеющихся восьми, равно C_8^3, т. е. равно

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56.$$

771. Через восемь точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно провести C_8^2 прямых. Имеем

$$C_8^2 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28.$$

772. (*Для работы в парах.*) а) Если заведующий лабораторией должен ехать в командировку, то из десяти сотрудников надо выбрать не пять, а четыре человека. Это можно сделать C_{10}^4 способами:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210;$$

б) если заведующий лабораторией в командировку не едет, то из десяти сотрудников надо выбрать пять. Это можно сделать C_{10}^5 способами:

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252.$$

773. а) Если словарь надо выбрать обязательно, то число возможных способов равно C_{11}^2, т. е.

$$\frac{11!}{9!\cdot 2!}=\frac{10\cdot 11}{2}=55;$$

б) если словарь выбирать не надо, число возможных способов равно C_{11}^3, т. е.

$$\frac{11!}{8!\cdot 3!}=\frac{9\cdot 10\cdot 11}{6}=165.$$

775. Выбрать книги читатель может C_{10}^3 способами, а журналы — C_4^2 способами. Число способов, которыми читатель может выбрать 3 книги и 2 журнала, равно

$$C_{10}^3\cdot C_4^2=\frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}=720.$$

776. а) Если в перестановке из букв слова «высота» буква «в» стоит на первом месте, то остальные пять букв можно переставлять P_5 способами. Так как $P_5=5!=120$, то таких способов 120;

б) если зафиксированы начальная буква «а» и конечная буква «т», то остальные четыре буквы можно переставлять P_4 способами. Число таких способов равно $4!=24$.

777. Четырёхзначное число, составленное из цифр 6, 7, 8, 9, является чётным, если оно оканчивается цифрой 6 или цифрой 8.

Число четырёхзначных чисел, оканчивающихся цифрой 6, равно P_3; число четырёхзначных чисел, оканчивающихся цифрой 8, также равно P_3.

Значит, число чётных чисел равно $P_3+P_3=12$.

778. а) Если в наряд из трёх человек должны входить Иванов и Петров, то остаётся выбрать одного человека из оставшихся десяти человек. Это можно сделать десятью способами;

б) если Иванов и Петров в наряд не входят, то из остальных десяти человек надо выбрать троих. Это можно сделать C_{10}^3 способами:

$$C_{10}^3=\frac{10!}{3!\cdot 7!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{6}=120.$$

779. а) В данном случае речь идёт о сочетаниях, так как команды должны различаться хотя бы одним игроком. Число способов, которыми тренер может составить команду, равно C_{16}^4:

$$C_{16}^4=\frac{16!}{12!\cdot 4!}=\frac{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=1820;$$

б) в данном случае речь идёт о размещениях, так как указан порядок, в котором должны играть шахматисты. Число вариантов составления команды равно A_{16}^4:

$$A_{16}^4 = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 43\,680.$$

780. Известно, что $C_n^2 = 378$, где n — число учащихся в классе. Имеем уравнение

$$\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 378; \quad \frac{n(n-1)}{2} = 378; \quad n^2 - n - 756 = 0.$$

Корни уравнения $n_1 = 28$; $n_2 = -27$. Второй корень не соответствует смыслу задачи. Значит, в классе 28 учащихся.

781. По условию задачи $C_n^4 = 13C_n^2$, где n — число туристов в группе. Имеем уравнение

$$\frac{n!}{4! \cdot (n-4)!} = \frac{13n!}{(n-2)! \cdot 2!}; \quad 13(n-4)! \cdot 4! = (n-2)! \cdot 2!.$$

После преобразований получаем уравнение $n^2 - 5n - 150 = 0$, корни которого $n_1 = 15$, $n_2 = -10$. Отрицательный корень не соответствует смыслу задачи. Значит, в группе было 15 туристов.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

831. Число четырёхзначных чисел, кратных 10, равно числу четырёхзначных чисел, оканчивающихся цифрой 0, т. е. числу трёхзначных чисел. Их число равно $999 - 99$, т. е. 900.

834. В первую строку запишем все числа, начинающиеся с цифры 1, во вторую строку — с цифры 2 и т. д. Получим таблицу:

1235, 1253, 1325, 1352, 1523, 1532,
2135, 2153, 2315, 2351, 2513, 2531,
3125, 3152, 3215, 3251, 3512, 3521,
5123, 5132, 5213, 5231, 5312, 5321.

Числа, бóльшие 2000, но меньшие 5000, составляют вторую и третью строки таблицы. Таких чисел 12.

835. (*Для работы в парах.*) а) Четырёхзначное число, составленное из цифр 1, 2, 3, 7, является чётным, если оно оканчивается цифрой 2. Число таких чисел равно числу перестановок из трёх элементов P_3, т. е. равно 6;

б) четырёхзначное число, составленное из цифр 1, 2, 3, 4, является чётным, если оно оканчивается цифрой 2 или цифрой 4. Число таких чисел равно сумме $P_3 + P_3$, т. е. равно 12.

Различие заданий состоит в том, что среди цифр в задании «а» есть только одна цифра, на которую может оканчиваться чётное число, а среди цифр в задании «б» две такие цифры.

836. а) Число 50! делится на 100, так как $100 = 2 \cdot 50$ и оба эти множителя входят в произведение 50!;

б) число 50! не делится на 305, так как $305 = 5 \cdot 61$, а простое число 61 не входит в произведение 50!;

в) число 50! делится на 1550, так как $1550 = 2 \cdot 25 \cdot 31$ и все три эти множителя входят в произведение 50!.

837. а) Одним нулём оканчивается число, которое кратно 2 и 5. Такие множители входят в произведение 5!. Следовательно, наименьшее значение n, при котором $n!$ оканчивается одним нулём, равно 5;

б) двумя нулями оканчивается число 10!, так как 10! кратно 2^2 и 5^2. Наименьшее n, при котором число $n!$ оканчивается двумя нулями, равно 10;

в) наименьшее число, которое оканчивается тремя нулями и имеет вид $n!$, это 15!. Значит, $n = 15$.

839. б) $\dfrac{n!}{(n+2)!} = \dfrac{n!}{n!(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$;

г) $\dfrac{(n+1)!(n+3)}{(n+4)!} = \dfrac{(n+1)!(n+3)}{(n+1)!(n+2)(n+3)(n+4)} = \dfrac{1}{(n+2)(n+4)}$;

д) $\dfrac{(n+11)! \cdot n}{(n+10)!} = \dfrac{(n+10)!(n+11) \cdot n}{(n+10)!} = n(n+11)$.

840. а) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 42$; $n(n+1) = 42$; $n^2 + n - 42 = 0$; $n_1 = -7$; $n_2 = 6$.

Число n должно быть натуральным, значит, $n = 6$;

б) $\dfrac{(n+1)! - n!}{(n+1)!} = \dfrac{5}{6}$; $1 - \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{5}{6}$; $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{6}$; $n = 5$.

841. а) Здесь речь идёт о сочетаниях, так как группы дежурных должны отличаться друг от друга хотя бы одним учащимся. Число способов равно C_{24}^2, т. е.

$$\frac{24!}{22! \cdot 2!} = \frac{23 \cdot 24}{2} = 276;$$

б) здесь речь идёт о размещениях, так как важен порядок элементов. Число способов равно A_{24}^2, т. е. $24 \cdot 23 = 552$.

842. Одного друга из шести Антон может пригласить в гости C_6^1 способами, двух друзей — C_6^2 способами и т. д., шесть друзей одним способом.

Значит, число возможных способов равно

$$C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+1=\frac{6!}{5!}+\frac{6!}{4!\cdot 2!}+\frac{6!}{3!\cdot 3!}+\frac{6!}{4!\cdot 2!}+\frac{6!}{5!}+1=$$
$$=6+15+20+15+6+1=63.$$

843. Предположим, что в финале первенства участвовало n команд, тогда на своём поле команда сыграла C_n^2 игр и столько же на чужом поле. Всего было сыграно $2\cdot C_n^2$ игр, что по условию задачи равно 30. Имеем уравнение

$$2\cdot C_n^2=30;\quad n(n-1)=30;\quad n^2-n-30=0;\quad n_1=-5;\ n_2=6.$$

Число n должно быть натуральным, значит, $n=6$. Следовательно, участвовало 6 команд.

844. а) В поезде девять вагонов. Если четыре пассажира хотят ехать в разных вагонах, то число возможных вариантов равно A_9^4, т. е.

$$9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=3024;$$

б) Алексеев и Смирнов могут выбрать один из девяти вагонов девятью способами. После этого Фёдоров и Харитонов могут выбрать по одному из восьми вагонов A_8^2 способами. По комбинаторному правилу умножения общее число способов равно

$$9\cdot A_8^2=9\cdot 8\cdot 7=504.$$

845. Число прямых, проведённых через каждые две точки плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, равно C_n^2, где n — число точек. Известно, что $C_n^2=28$. Имеем уравнение

$$\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}=28;\quad n^2-n-56=0;\quad n_1=-7;\ n_2=8.$$

Число n должно быть натуральным. Значит, было взято 8 точек.

846. Учащихся из 9 «А» можно выделить для работы на пришкольном участке C_{25}^3 способами, из 9 «Б» — C_{20}^2 способами, а из 9 «В» — C_{18}^1 способами. По комбинаторному правилу умножения общее число способов равно $C_{25}^3\cdot C_{20}^2\cdot C_{18}^1$, т. е. 7 866 000.

847. Пусть в группе было n туристов. Тогда дежурного и его помощника можно выбрать A_n^2 способами. Если бы число туристов в группе было равно $(n+1)$, то число вариантов выбора было бы A_{n+1}^2. Имеем уравнение

$$A_{n+1}^2=1{,}25A_n^2;\quad (n+1)n=1{,}25n(n-1);$$
$$n+1=1{,}25n-1{,}25;\quad 0{,}25n=2{,}25;\quad n=9.$$

848. б) Из 12 человек выбрать 5 человек можно C_{12}^5 способами. После этого выбора в группе останется $12 - 5$, т. е. 7 человек. Выбрать из семи человек 7 можно лишь одним способом. Поэтому число способов, которыми можно осуществить указанный в условии выбор, равно $C_{12}^5 \cdot 1$, т. е.

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792.$$

849. Двух ведущих научных сотрудников из пяти можно выбрать C_5^2 способами, а трёх старших научных сотрудников из восьми — C_8^3 способами. Общее число возможных способов по комбинаторному правилу умножения равно $C_5^2 \cdot C_8^3$. Имеем

$$C_5^2 \cdot C_8^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 560.$$

850. а) Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 можно составить только одно трёхзначное число, сумма цифр которого равна 3. Это число 111;

б) из цифр 1, 2, 3, 4, 5 можно составить три трёхзначных числа, сумма цифр которых равна 4. Это числа 112, 121, 211;

в) среди трёхзначных чисел, сумма цифр которых равна 6, есть одно число, все цифры которого одинаковы (222), три числа, у которых две одинаковые цифры (114, 141, 411), и есть числа, у которых все цифры различны. Они состоят из цифр 1, 2, 3. Таких чисел $P_3 = 6$.

Всего число трёхзначных чисел равно $1 + 3 + 6$, т. е. 10.

851. а) Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 можно составить 8 трёхзначных чисел, сумма цифр которых равна 6 и которые содержат цифру 0. Это числа 105, 150, 204, 240, 402, 420, 501, 510.

Остальные трёхзначные числа, сумма цифр которых равна 6, — это числа, образованные цифрами 1, 2, 3. Таких чисел P_3, т. е. 6. Значит, всего искомых чисел $8 + 6$, т. е. 14;

б) рассмотрим три группы чисел. Одна группа чисел, в записи которых есть цифра 0, — это числа 405, 450, 504, 540. Другая группа — числа, составленные из цифр 1, 3, 5, — их 3!, т. е. 6. Третья группа — числа, составленные из цифр 2, 3, 4, — их тоже 6. Значит, всего таких чисел $4 + 6 + 6$, т. е. 16.

852. а) $\frac{P_6 - P_4}{P_5} = \frac{6! - 4!}{5!} = \frac{4!(5 \cdot 6 - 1)}{4! \cdot 5} = \frac{29}{5} = 5{,}8;$

б) $\dfrac{A_8^4-A_8^3}{A_7^3-A_7^2}=\dfrac{\dfrac{8!}{4!}-\dfrac{8!}{5!}}{\dfrac{7!}{4!}-\dfrac{7!}{5!}}=\dfrac{8!\left(\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}\right)}{7!\left(\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}\right)}=\dfrac{8!}{7!}=8;$

г) $\dfrac{C_6^3-C_6^2}{A_6^2}=\left(\dfrac{6!}{3!\cdot 3!}-\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}\right):\dfrac{6!}{4!}=(20-15):\dfrac{4!\cdot 5\cdot 6}{4!}=\dfrac{5}{30}=\dfrac{1}{6}.$

854. Пусть n — искомое число элементов. Известно, что $A_n^4=14A_{n-2}^3$. Имеем уравнение

$$n(n-1)(n-2)(n-3)=14(n-2)(n-3)(n-4);$$

$n(n-1)=14(n-4)$; $\quad n^2-15n+56=0$; $\quad n_1=7$; $n_2=8$.

Задача имеет два решения.

855. а) $14C_n^{n-2}=15A_{n-3}^2$;

$\dfrac{14\cdot n!}{(n-2)!\cdot 2!}=15(n-3)(n-4);$

$7n(n-1)=15(n^2-7n+12);$

$4n^2-49n+90=0;$

$n_1=2{,}25;\quad n_2=10.$

Число n должно быть натуральным, значит, $n=10$;

в) $13C_{2n}^{n+1}=7C_{2n+1}^{n-1}$;

$\dfrac{13\cdot(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}=\dfrac{7(2n+1)!}{(n-1)!(n+2)!};$

$13(2n)!(n+2)!=7(2n+1)!(n+1)!;$

$13(n+2)=7(2n+1);$

$n=19.$

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 25

9. Из цифр 0, 2, 4, 9 можно составить 9 двузначных чисел, цифры которых не повторяются:

20, 24, 29, 40, 42, 49, 90, 92, 94.

11. Для каждой художественной книги можно выбрать каждую из научно-популярных книг пятью способами. Так как художественных книг 10, то общее число вариантов выбора пар книг равно $5\cdot 10$, т. е. 50.

Пункт 26

10. Применив комбинаторное правило умножения, получим, что общее число способов, которыми Фёдор может выполнить контрольную работу, равно $P_4\cdot P_3$, т. е. $4!\cdot 3!=24\cdot 6=144$.

12. а) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$;

в) $\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1+n(n+1)-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1+n^2+n-n-1}{(n+1)!} = \frac{n^2}{(n+1)!}$.

13. а) Число 30! делится на 26, так как число 26 меньше 30. Следовательно, оно входит множителем в произведение 30!;

б) число 30! не делится на 310, так как $310 = 10 \cdot 31$, а простое число 31 не входит множителем в произведение 30!;

в) число 30! делится на 320, так как $320 = 16 \cdot 20$ и оба эти множителя входят в произведение 30!.

14. Выпишем ряд значений $n!$ для значений $n \leqslant 8$:

$$2,\ 6,\ 24,\ 120,\ 720,\ 5040,\ 40\,320.$$

После увеличения на единицу каждого из этих чисел получим новые числа:

$$3,\ 7,\ 25,\ 121,\ 721,\ 5041,\ 40\,321.$$

В этом ряду три числа являются квадратами натуральных чисел 25, 121 и 5041. Им соответствуют значения n, равные 4, 5 и 7.

Пункт 27

6. а) Число трёхзначных чисел, в которых цифры не повторяются, равно A_5^3, т. е. равно $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$;

б) из найденного в задании «а» числа размещений надо исключить размещения, начинающиеся с цифры 0. Их число равно A_4^3, т. е. 24. Значит, искомое число трёхзначных чисел равно $60 - 24 = 36$.

7. Трёхзначное число, составленное из цифр 1, 2, 3, 4, 5 без их повторения, является чётным, если оно оканчивается цифрой 2 или цифрой 4. Число таких чисел равно $A_4^2 + A_4^2$. Имеем

$$2 \cdot A_4^2 = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24.$$

11. Количество всех трёхзначных кодов без повторения цифр равно A_{10}^3, т. е. $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Из них надо исключить те коды, которые начинаются с цифры 0. Число таких кодов равно $A_9^2 = 9 \cdot 8$. Значит, можно составить $720 - 72$, т. е. 648 кодов.

Пункт 28

6. Число возможных способов выбора трёх газет из 12 равно C_{12}^3, т. е.

$$\frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} = 220.$$

Число возможностей выбора четырёх газет из 12 равно C_{12}^4, т. е.

$$\frac{12!}{4!\cdot 8!}=\frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=495.$$

Число возможностей выбора увеличится на 275.

9. Число прямых, проведённых через каждые две точки плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, равно C_n^2, где n — число точек плоскости.

По условию $C_n^2=105$. Отсюда

$$\frac{n!}{2!(n-2)!}=105; \quad n(n-1)=210;$$

$$n^2-n-210=0; \quad n_1=-14; \; n_2=15.$$

Число точек должно быть натуральным. Следовательно, было отмечено 15 точек.

10. Решая уравнение $C_n^2=351$, где n — число учащихся класса за исключением старосты, получаем

$$\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}=351; \quad n(n-1)=702;$$

$$n^2-n-702=0; \quad n_1=-26; \; n_2=27.$$

Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи. Значит, в классе всего 28 учащихся.

11. Задача сводится к решению уравнения $11C_n^2=C_{n+2}^4$. Имеем

$$\frac{11n!}{(n-2)!\cdot 2!}=\frac{(n+2)!}{(n-2)!\cdot 4!};$$

$$11n!\cdot 4!=(n+2)!\cdot 2!; \quad 132=(n+1)(n+2);$$
$$n^2+3n-130=0; \quad n_1=-13; \; n_2=10.$$

Число n должно быть натуральным, следовательно, $n=10$.

12. б) $C_n^2+C_{n+1}^2=64; \quad \dfrac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}+\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!\cdot 2!}=64;$

$\dfrac{n(n-1)}{2}+\dfrac{n(n+1)}{2}=64; \quad 2n^2=128; \quad n=8;$

в) $C_n^3=15(n-1)-C_n^2; \quad C_n^3+C_n^2=15(n-1);$

$\dfrac{n!}{(n-3)!\cdot 3!}+\dfrac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}=15(n-1); \quad \dfrac{n(n-2)}{6}+\dfrac{n}{2}=15;$

$n^2+n-90=0; \quad n_1=-10; \quad n_2=9.$

Число n должно быть натуральным, значит, $n=9$.

§ 12. Начальные сведения из теории вероятностей

Номер пункта	Название пункта	Число уроков
34	Относительная частота случайного события	5 (6)
35	Вероятность равновозможных событий	
	Контрольная работа № 8	1

Содержание материала

В данном параграфе учащиеся знакомятся с понятиями «случайное событие», «частота случайного события», «относительная частота случайного события». Важное образовательное значение имеет вводимое в этом параграфе понятие «вероятность случайного события». Учащиеся узнают, что если в данной серии экспериментов со случайными исходами значения относительных частот появления одного и того же события близки к некоторому определённому числу, то это число принимают за вероятность данного случайного события. Указывается, что такой подход к определению вероятности случайного события называют статистическим.

Наряду со статистическим подходом рассматривается классический подход к определению вероятности случайного события. Подчёркивается, что если все исходы какого-либо испытания равновозможны, то вероятность события, рассматриваемого в этом испытании, равна отношению числа благоприятных для него исходов к числу всех равновозможных исходов.

Учащимся предлагаются различные упражнения, в которых изученные сведения о вероятности случайных событий находят применение.

Основная цель

Основная цель изучения представленного в параграфе материала состоит в том, чтобы ввести понятия «случайное событие», «частота случайного события», «относительная частота случайного события», «вероятность случайного события», выработать умение решать несложные задачи с использованием этих понятий, а также познакомить учащихся с различными подходами к вычислению вероятности некоторого события.

Характеристика основных видов деятельности учащихся

При изучении данного параграфа учащиеся выполняют различные упражнения, в которых используются новые для них понятия случайного события, частоты случайного события, относительной частоты случайного события. Они знакомятся с понятием вероятности случайного события, получают представление о статистическом и классическом подходах к вычислению вероятности некоторого события, выполняют различные упражнения, в которых применяются эти подходы. Учащиеся узнают о построении вероятностной шкалы, приобретают начальный опыт в использовании геометрических соображений при вычислении вероятностей некоторых событий.

Методический комментарий

В пункте 34 учащиеся знакомятся с понятием относительной частоты случайного события. Им предлагаются для работы в классе и дома достаточно простые упражнения **787—792**. Впервые учащиеся встречаются с понятием вероятности случайного события. При введении этого понятия важную роль играет рассказ учителя об опытах, которые проводили многие учёные, подсчитывая относительную частоту выпадения орла при многократном бросании монеты. Учащиеся узнают, что всякий раз относительная частота оказывалась близкой к $\frac{1}{2}$ и, как говорят в таких случаях, вероятность события «выпал орёл при подбрасывании монеты, имеющей правильную геометрическую форму», равна $\frac{1}{2}$.

Важно разъяснить учащимся, что вообще если в длинной серии одинаковых экспериментов со случайными исходами значения относительной частоты появления одного и того же события близки к некоторому числу, то это число принимают за вероятность случайного события. Учитель сообщает, что такой подход к нахождению вероятности случайного события называют статистическим. Девятиклассники применяют статистический подход для вычисления вероятности события при выполнении упражнений **793—795**.

В пункте 35 учащиеся знакомятся с классическим подходом к вычислению вероятности случайного события. Вводятся понятия равновозможных исходов испытания, исходов, благоприятных для некоторого события. Учащиеся узнают, что если все исходы какого-либо испытания равновозможны, то вероятность события равна отношению числа благоприятных для него исходов к числу всех равновозможных исходов. Следует обратить их внимание на то, что статистический подход к нахождению вероятности некоторого события предполагает фактическое проведение испытания, а при классическом подходе не требуется, чтобы испытание было проведено в действительности.

В рассмотренной в учебнике задаче и в авторском примере 1 учащиеся встречаются с простейшими примерами использования классического подхода к нахождению вероятности случайного события. После этого они приступают к выполнению в классе и дома упражнений **798—802**. На последующих уроках учащиеся знакомятся с примерами 2 и 3, приведёнными в учебном тексте, и выполняют более сложные задания **802—808**, связанные с применением классического подхода при вычислении вероятностей случайных событий. Вводятся понятия «невозможное событие» и «достоверное событие», которые используются в упражнениях **809**, **810**. Далее рекомендуется познакомить учащихся со свойством вероятности противоположных событий.

Специальное внимание следует уделить рассмотренному в учебнике примеру детской игры с бросанием дротика, в котором учащиеся получают представление о геометрической вероятности.

В упражнениях **809—814** учащиеся знакомятся с различными случаями применения классического способа вычисления вероятностей случайных событий. Особое внимание следует уделить упражнению **814**, где представлена задача-исследование. Важно организовать коллективное обсуждение учащимися способа решения этой задачи. Завершают систему упражнений, способствующих формированию понятия вероятности случайного события, задания **815—817**, в которых используются геометрические соображения при определении вероятности случайного события.

При наличии времени можно предложить учащимся выполнить некоторые из дополнительных упражнений к параграфу 12. Интерес учащихся обычно вызывают упражнения **853**, **862**, **865**, **867**, **872**.

Указания к основным упражнениям учебника

793. Вычислим относительную частоту попадания в цель при каждом выстреле. Получим значения:

0,76; 0,8; 0,84; 0,8; 0,78; 0,84; 0,86; 0,9; 0,8.

Можно высказать предположение, что вероятность попадания в цель для этого стрелка равна 0,8.

795. Обозначим через n число проросших семян. Имеем $\frac{n}{85} = 0{,}9$; $n \approx 77$.

Можно сделать предположение, что число проросших семян равно 77.

799. а) Вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет одно очко, равна $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$;

б) число благоприятных исходов равно 2 — это выпадение пяти и шести очков.

Вероятность того, что выпадет больше четырёх очков, равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$.

800. Общее число двузначных чисел равно 90.

Выпишем числа, сумма цифр каждого из которых равна 6:

$$15,\ 24,\ 33,\ 42,\ 51,\ 60.$$

Таких чисел 6, следовательно, вероятность того, что сумма цифр написанного числа равна 6, составляет $\frac{6}{90} = \frac{1}{15}$.

801. Число благоприятных исходов равно $93 - 3 - 6$, т. е. равно 84.

Вероятность данного события равна $\frac{84}{93} = \frac{28}{31}$.

803. Как видно из таблицы, приведённой на с. 205 учебника, число равновозможных исходов при бросании двух игральных кубиков равно 36.

Число очков, сумма которых кратна 5, выпадет в случаях:

$$(1;\ 4),\ (4;\ 1),\ (2;\ 3),\ (3;\ 2),\ (5;\ 5),\ (4;\ 6) \text{ и } (6;\ 4).$$

Таких случаев 7, следовательно, вероятность этого события равна $\frac{7}{36}$.

Число очков, сумма которых кратна 6, выпадает в случаях:

$$(1;\ 5),\ (5;\ 1),\ (2;\ 4),\ (4;\ 2),\ (3;\ 3) \text{ и } (6;\ 6).$$

Таких случаев 6, следовательно, вероятность этого события равна $\frac{6}{36}$.

Так как $\frac{7}{36} > \frac{6}{36}$, то вероятность выигрыша больше у Андрея.

804. Число способов набрать трёхзначное число из цифр 1, 5 и 9 равно P_3, т. е. 6. Значит, вероятность набрать верно номер телефона равна $\frac{1}{6}$.

805. Число возможных исходов равно числу перестановок из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, т. е. равно 120. Следовательно, вероятность открыть сейф равна $\frac{1}{120}$.

806. Из букв «о», «т», «к», «р» можно составить 24 различные перестановки, так как $P_4 = 4! = 24$. Слово «крот» может получиться единственным способом, значит, вероятность его получения равна $\frac{1}{24}$.

807. Вероятность того, что сумма выпавших очков кратна 6, равна $\frac{1}{6}$ (см. упражнение **803**).

Вероятность противоположного события равна $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

808. Из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить 24 различные перестановки, так как $P_4 = 4! = 24$. Среди этих чисел меньшими 2000 являются числа, у которых первая цифра 1. Таких чисел 3!, т. е. 6. Значит, вероятность того, что полученное число меньше 2000, равна $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$. Вероятность противоположного события равна $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

809. Жёлтых карандашей в коробке нет, следовательно, $P(D) = 0$; все карандаши, лежащие в коробке, — цветные, значит, $P(C) = 1$. Вероятность вытащить красный или синий карандаш больше 0, но меньше 1:

$$0 < P(A) < 1; \quad 0 < P(B) < 1.$$

811. Из 10 деталей, находящихся в ящике, 9 деталей стандартные. Число равновозможных исходов равно C_{10}^2, а благоприятными являются C_9^2 исходов.

Следовательно, вероятность выбрать стандартную деталь равна

$$\frac{C_9^2}{C_{10}^2} = \frac{9 \cdot 8}{2} : \frac{10 \cdot 9}{2} = 0{,}8.$$

812. Билеты на ёлку распределяются между 27 учениками. Три билета можно распределить между ними C_{27}^3 способами. Благоприятными являются C_{12}^3 исходов, следовательно, вероятность того, что все билеты достанутся девочкам, равна

$$\frac{C_{12}^3}{C_{27}^3} = \frac{12!}{9! \cdot 3!} : \frac{27!}{24! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{25 \cdot 26 \cdot 27} = \frac{44}{585} \approx 0{,}075.$$

813. В коробке лежит 12 карандашей. Наугад выбрать два из них можно C_{12}^2 способами. А два красных карандаша можно выбрать C_8^2 способами. Следовательно, вероятность того, что оба выбранных карандаша окажутся красными, равна

$$\frac{C_8^2}{C_{12}^2} = \frac{8! \cdot 10!}{6! \cdot 12!} = \frac{7 \cdot 8}{11 \cdot 12} = \frac{14}{33} \approx 0{,}4.$$

814. (*Задача-исследование.*) Пусть номерки предъявляют последовательно Аня, Вера и Маша. Обозначим через А событие, состоящее в том, что по номерку получено Анино пальто, через В событие, состоящее в том, что получено Верино пальто, через М событие, состоящее в том, что получено Машино пальто. Равновозможными являются 6 исходов: АВМ, АМВ, ВАМ, ВМА, МАВ, МВА.

а) Благоприятным для события «только Аня получила своё пальто» является только исход АМВ (так как в случае АВМ каждая из девочек получила своё пальто). Искомая вероятность равна $\frac{1}{6}$;

б) благоприятными для события «Вера не получила своего пальто» являются 4 исхода: АМВ, ВАМ, ВМА, МАВ (те исходы, в обозначении которых буква В не стоит на втором месте). Искомая вероятность равна $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

815. Вероятность попадания выбранной точки в треугольник CDE равна отношению площадей треугольников CDE и ABC.

Пусть высота треугольника CDE равна h, тогда высота треугольника ABC равна $3h$.

$$S_{CDE} = \frac{1}{2} DE \cdot h, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot 3h,$$

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{1}{2} DE \cdot h\right) : \left(\frac{1}{2} AB \cdot 3h\right) = \frac{DE \cdot h}{3DE \cdot 3h} = \frac{1}{9}.$$

Искомая вероятность равна $\frac{1}{9}$.

816. Обозначим точку разрыва через C. Тогда $AC \leqslant 500$ м, т. е. $AC \leqslant 0{,}5$ км. Искомая вероятность равна $\frac{0{,}5}{2{,}5} = \frac{1}{5}$.

817. Абсцисса x наугад выбранной точки должна удовлетворять неравенству $0 \leqslant x \leqslant 1{,}2$. Благоприятным исходом является попадание точки в отрезок длиной 1,2.

Длина отрезка AB равна 3, следовательно, искомая вероятность равна $\frac{1{,}2}{3} = 0{,}4$.

Указания к дополнительным упражнениям учебника

856. В первом десятке четыре простых числа: 2, 3, 5 и 7. Относительная частота появления простых чисел равна 0,4. Во втором десятке тоже четыре простых числа: 11, 13, 17, 19. Относительная частота равна 0,4. В третьем десятке два простых числа: 23 и 29. Относительная частота равна 0,2.

а) $0{,}4 > 0{,}2$, следовательно, относительная частота появления простых чисел в первом десятке больше, чем в третьем;

б) в десятом десятке всего одно простое число 97. Относительная частота равна 0,1; $0{,}4 > 0{,}1$, следовательно, относительная частота появления простых чисел во втором десятке больше, чем в десятом;

в) в четвёртом десятке два простых числа: 31 и 37. Относительная частота равна 0,2. В пятом десятке три простых числа: 41, 43, 47. Относительная частота равна 0,3; $0{,}2 < 0{,}3$, следовательно, относительная частота появления простых чисел в четвёртом десятке меньше, чем в пятом.

857. Обозначим следующие события:

A — взятая кость домино в сумме содержит 6 очков;

B — взятая кость домино в сумме содержит 5 очков;

C — взятая кость домино в сумме содержит 4 очка.

а) Шесть очков могут содержать кости 0—6, 1—5, 2—4 и 3—3. Благоприятными для события A являются 4 исхода, число равновозможных исходов равно 28, следовательно, $P(A) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$;

б) сумма очков, равная 5, выпадет на костях 0—5, 1—4, 2—3, а сумма очков, равная 4, — на костях 0—4, 1—3, 2—2. Для событий B и C получили по 3 благоприятных исхода, следовательно, $P(B) = P(C) = \frac{3}{28}$.

858. Число равновозможных исходов равно P_4, т. е. 24.

а) Благоприятный исход для события A, состоящего в появлении числа 123, всего один, значит, $P(A) = \frac{1}{24}$;

б) для события B, состоящего в появлении числа 312 или числа 321, существует два благоприятных исхода, следовательно, $P(B) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$;

в) для события C, состоящего в появлении трёхзначного числа, первая цифра которого 2, существует A_3^2 благоприятных исходов, следовательно, $P(C) = \frac{A_3^2}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

859. а) Количество однозначных номеров равно 9, следовательно, вероятность вытащить билет с однозначным номером равна $\frac{9}{25}$;

б) количество двузначных номеров равно 16, следовательно, вероятность вытащить билет с двузначным номером равна $\frac{16}{25}$.

860. Подсчитаем сначала число шаров, в номерах которых есть цифра 6. Это шары с номерами:

6, 16, 26, 36, 46, 56, 60, 61, 62, 63, 64, 65,
66, 67, 68, 69, 76, 86, 96.

Таких шаров 19. Вероятность того, что номер вынутого шара имеет цифру 6, равна $\frac{19}{100}$. Вероятность противоположного события равна $1 - 0{,}19 = 0{,}81$.

861. Всего в мешке 15 жетонов. Среди чисел от 1 до 15 пять чисел не делятся ни на 2, ни на 3. Это числа 1, 5, 7, 11 и 13. Значит, вероятность того, что номер вытянутого жетона не делится ни на 2, ни на 3, равна $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

862. Обозначим через A событие, состоящее в том, что из ящика извлечены 2 красных шара и один зелёный. Два красных шара из 6 можно выбрать C_6^2 способами, а один зелёный — четырьмя способами. Значит, число благоприятных исходов для события A равно $C_6^2 \cdot 4$.

Число равновозможных исходов равно C_{10}^3, следовательно,

$$P(A) = \frac{C_6^2 \cdot 4}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}.$$

863. Вероятность того, что первая вытянутая кость будет дуплем, равна $\frac{7}{28}$, т. е. $\frac{1}{4}$. Среди оставшихся 27 костей 6 дуплей. Значит, вероятность того, что вторая вытянутая кость окажется дуплем, равна $\frac{6}{27}$, т. е. $\frac{2}{9}$.

Вероятность того, что обе вынутые кости окажутся дуплями, равна $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9}$, т. е. равна $\frac{1}{18}$.

865. а) Три карточки из 5 можно выложить A_5^3 способами, а слово «рот» получится только в одном случае, значит, вероятность появления слова «рот» равна $\frac{1}{A_5^3} = \frac{1}{60}$;

б) вероятность появления слова «сорт» равна $\frac{1}{A_5^4} = \frac{1}{120}$;

в) вероятность появления слова «спорт» равна $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$.

866. а) Число способов, которыми можно извлечь два шара из пяти, равно C_5^2. Имеем

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10.$$

Благоприятный исход, при котором вытащили шары с номерами 1 и 2, только один. Искомая вероятность равна $\frac{1}{10}$;

б) в этом случае число благоприятных исходов равно двум, когда вытащены шары с номерами 1 и 4 или 2 и 3. Следовательно, вероятность вытащить шары с номерами, сумма очков которых равна 5, составляет $\frac{2}{10}$, т. е. $\frac{1}{5}$.

867. Вероятность извлечь из коробки белый шар равна $\frac{n}{12}$. Известно, что эта вероятность равна $\frac{1}{6}$. Из равенства $\frac{n}{12} = \frac{1}{6}$ находим, что $n = 2$.

868. Пусть в мешке содержится n белых шаров и $2n$ красных. Тогда число синих шаров равно $(24 - 3n)$.

Вероятность того, что вынутый из коробки шар окажется синим, равна $\frac{24 - 3n}{24}$.

Чтобы найти значение числа n, воспользуемся условием: вероятность вынуть белый шар равна $\frac{1}{8}$. Из равенства $\frac{n}{24} = \frac{1}{8}$ найдём, что $n = 3$. Тогда

$$\frac{24 - 3n}{24} = \frac{24 - 9}{24} = \frac{5}{8}.$$

Вероятность вынуть из коробки синий шар равна $\frac{5}{8}$.

869. Выпишем номера жетонов, в которых содержится только одна цифра 3:

3, 13, 23, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 43.

Таких номеров 13. Значит, искомая вероятность равна $\frac{13}{50}$, т. е. равна 0,26.

870. Обозначим через A событие, состоящее в том, что при однократном бросании монеты выпадет решка. Его вероятность $P(A)$ равна $\frac{1}{2}$.

Через B обозначим событие, состоящее в выпадении решки при троекратном бросании монеты.

Все подбрасывания монеты независимы. Следовательно,

$$P(B) = P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) = \frac{1}{8}.$$

871. Подсчитаем число равновозможных исходов при наборе 5 цифр шифра. Каждую цифру можно набрать десятью способами. Следовательно, число равновозможных исходов равно 10^5. Благоприятный исход один.

Искомая вероятность равна $\frac{1}{10^5}$, т. е. 0,00001.

872. При бросании трёх игральных кубиков число равновозможных исходов равно $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

а) Сумма выпавших очков может быть равна 3 лишь в одном случае: (1; 1; 1). Вероятность этого события равна $\frac{1}{216}$;

б) сумма выпавших очков может быть равна 4 в трёх случаях:

(1; 1; 2), (1; 2; 1), (2; 1; 1).

Вероятность этого события равна $\frac{3}{216} = \frac{1}{72}$;

в) сумма выпавших очков может быть равна 5 в шести случаях:

(1; 1; 3), (1; 3; 1), (3; 1; 1), (1; 2; 2), (2; 1; 2), (2; 2; 1).

Вероятность этого события равна $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$;

г) сумма выпавших очков может быть равна 7 в пятнадцати случаях:

(1; 1; 5), (1; 5; 1), (5; 1; 1), (1; 2; 4), (1; 4; 2), (2; 1; 4), (2; 4; 1), (4; 1; 2), (4; 2; 1), (1; 3; 3), (3; 1; 3), (3; 3; 1), (2; 2; 3), (2; 3; 2), (3; 2; 2).

Вероятность этого события равна $\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$.

873. При бросании трёх игральных кубиков число равновозможных исходов равно $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Благоприятные исходы для выигрыша Миши возможны в шести случаях:

(1; 1; 3), (1; 3; 1), (3; 1; 1), (1; 2; 2), (2; 1; 2), (2; 2; 1).

Вероятность того, что выиграет Миша, равна $\frac{6}{216}$, т. е. $\frac{1}{36}$.

Благоприятными исходами для выигрыша Кости являются случаи выпадения 16 очков:

(4; 6; 6), (6; 4; 6), (6; 6; 4), (5; 5; 6), (5; 6; 5), (6; 5; 5).

Вероятность того, что выиграет Костя, равна $\frac{1}{36}$.

Шансы мальчиков одинаковы.

874. а) Вероятность того, что при одном броске игрального кубика выпадет число очков, кратное 2, равна $\frac{1}{2}$. Так как броски независимы, то вероятность выпадения числа очков, кратного 2, при троекратном бросании кубика равна $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$;

б) вероятность выпадения числа очков, кратного 3, равна $\frac{1}{3}$ (это случаи выпадения очков 3 и 6). При трёх бросках вероятность выпадения числа очков, кратного 3, равна $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

Указания к упражнениям из рабочей тетради

Пункт 29

8. Относительная частота попадания в цель для каждой серии равна:

0,8, 1, 0,8, 0,6, 0,8, 0,8, 1, 0,8, 0,8, 1, 0,6.

Среднее арифметическое этих значений равно $\approx 0{,}8$. Можно высказать предположение, что спортсмен покажет на соревнованиях результат, близкий к 0,8.

9. Относительная частота удачных бросков спортсмена равна $\frac{7}{12}$, т. е. приблизительно 0,6.

При выполнении на соревновании четырёх штрафных бросков спортсмен может ни разу не попасть в корзину, так как известно, что на тренировке он сделал 5 неудачных бросков из 12.

10. Относительная частота появления велосипедов с дефектами равна 0,02. Обозначим через n предполагаемое число велосипедов с дефектами в партии из 2500 велосипедов. Из условия $\frac{n}{2500} = 0{,}02$ получаем $n = 50$.

Пункт 30

5. Площадь треугольника DBE в 4 раза меньше площади треугольника ABC, следовательно, вероятность того, что случайно выбранная точка треугольника ABC принадлежит треугольнику DBE, равна $\frac{1}{4}$.

Событие, состоящее в том, что случайно выбранная точка треугольника ABC принадлежит четырёхугольнику $ADEC$, является противоположным, следовательно, его вероятность равна $1-\frac{1}{4}$, т. е. $\frac{3}{4}$.

7. Обозначим буквой Б выбор белой пуговицы, а буквой К выбор красной пуговицы. При выборе двух пуговиц возможны следующие 4 исхода: ББ, БК, КБ и КК. Только один исход из них благоприятный. Вероятность того, что обе пуговицы окажутся красными, равна $\frac{1}{4}$.

8. Анализируя таблицу, приведённую на с. 205 учебника, находим, что число пар, в которых первая цифра больше второй, равно 15. Общее число равновозможных событий равно 36. Следовательно, вероятность того, что на белом кубике выпадет больше очков, чем на чёрном, равна $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$.

9. Задача сводится к определению того, какую часть площади квадрата $ABCD$ составляет площадь закрашенной фигуры.

Каждая сторона квадрата $A`B`C`D`$ вдвое меньше соответствующей стороны квадрата $ABCD$. Следовательно, площадь квадрата $A`B`C`D`$ в 4 раза меньше площади квадрата $ABCD$.

Площадь закрашенной фигуры составляет половину площади квадрата $A`B`C`D`$, т. е. $\frac{1}{8}$ часть площади квадрата $ABCD$.

Следовательно, вероятность попадания случайно выбранной точки в закрашенную фигуру равна $\frac{1}{8}$.

11. Число равновозможных исходов при выборе четырёх тетрадей из 25 равно C_{25}^4. В пачке находится 9 тетрадей в клетку $(25-16=9)$. Число благоприятных исходов равно C_9^4. Следовательно, вероятность выбора четырёх тетрадей в клетку равна

$$\frac{C_9^4}{C_{25}^4}=\frac{9!\cdot 21!}{5!\cdot 25!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}\approx 0{,}01.$$

12. Число учеников, занимающихся и спортом и музыкой, равно $18 + 15 - 30$, т. е. равно 3.

Следовательно, вероятность того, что случайно выбранный ученик занимается и спортом и музыкой, равна $\frac{3}{30}$, т. е. равна 0,1.

Для тех, кто хочет знать больше

Пункт 36. Сложение и умножение вероятностей

Методический комментарий

В данном пункте учащиеся получают возможность расширить запас сведений о вероятности событий. Здесь вводятся такие важные для теории вероятностей понятия, как «несовместные события» и «независимые события». Учащиеся узнают, как вычисляется вероятность события, состоящего в наступлении одного из двух несовместных событий, и вероятность события, состоящего в совместном наступлении двух независимых событий.

Ознакомить учащихся с материалом данного пункта можно на занятии математического кружка. На этом занятии один из учащихся может познакомить членов кружка с понятиями «несовместные события» и «независимые события» и рассказать об использовании этих понятий в примерах 1 и 2. Второй ученик может рассказать о приёмах расчёта вероятности события, использованных в примере 3. После этого под руководством учителя выполняются некоторые из упражнений **820—830**.

Указания к упражнениям учебника

822. Вероятность получить слово «трос» равна $\frac{1}{4!}$.

Тому же числу равна вероятность получения слова «сорт». Значит, вероятность получить одно из этих слов равна $\frac{1}{4!} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{12}$.

823. При бросании двух игральных кубиков существует 36 равновозможных исходов. Благоприятными для события A: «на одном кубике выпадет одно очко, а на другом — более трёх очков» — являются такие исходы:

$$(1;\ 4),\ (1;\ 5),\ (1;\ 6) \text{ или } (4;\ 1),\ (5;\ 1),\ (6;\ 1).$$

Значит, искомая вероятность события A равна $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

824. Пусть событие A означает, что взятая наугад из первой партии электролампочка окажется бракованной, а событие B — что бракованной окажется электролампочка, взятая из второй партии. Из условия следует, что в первой партии 3 лампочки из 100 бракованные, а во второй партии — 4 лампочки из 100 бракованные. Значит,

$$P(A) = 0{,}03, \quad P(B) = 0{,}04.$$

События A и B независимые (извлечение лампочки из первой партии не зависит от того, какую лампочку извлекут из второй партии). Поэтому вероятность того, что обе лампочки окажутся бракованными, равна

$$P(A) \cdot P(B) = 0{,}03 \cdot 0{,}04 = 0{,}0012.$$

825. Вероятность события A: «взятая с первой полки книга окажется сборником стихов» — равна

$$\frac{C_2^1}{C_{12}^1} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \text{ т. е. } P(A) = \frac{1}{6}.$$

Вероятность события B: «взятая со второй полки книга окажется сборником стихов» — равна

$$\frac{C_3^1}{C_{15}^1} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, \text{ т. е. } P(B) = \frac{1}{5}.$$

Так как события A и B независимые, то вероятность того, что обе книги окажутся сборниками стихов, равна

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}.$$

826. а) Вероятность извлечь в первый раз белый шар равна $\frac{5}{8}$ и во второй раз равна $\frac{5}{8}$. Так как события независимы, то вероятность того, что оба раза будут извлечены белые шары, равна $\frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8}$, т. е. $\frac{25}{64}$;

б) аналогично находим, что вероятность того, что оба раза будут извлечены чёрные шары, равна $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8}$, т. е. $\frac{9}{64}$.

828. Рассмотрим такие события:
A — первое орудие поразило мишень;
B — второе орудие поразило мишень;
C — мишень поражена хотя бы одним из орудий.

Рассмотрим события $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$ и найдём $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$ и $P(\overline{C})$.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2,$$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$$

События A и B независимы, значит, независимыми являются и события $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Событие $\overline{C}$ означает совместное наступление событий $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Значит,

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05.$$

Так как события C и $\overline{C}$ противоположные, то

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95.$$

Вероятность того, что мишень будет поражена, равна 0,95.

829. Найдём вероятность события A, означающего, что на кубиках выпало менее 10 очков. Проще сначала найти вероятность противоположного A события.

При бросании двух кубиков число равновозможных исходов равно 36.

Исходов, когда выпадет не менее 10 очков, шесть — это исходы

$$(4;\ 6),\ (5;\ 5),\ (6;\ 4),\ (5;\ 6),\ (6;\ 5),\ (6;\ 6).$$

Значит, $P(\overline{A}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Отсюда $P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Следовательно, вероятность того, что игрок сделает менее 10 ходов, равна $\frac{5}{6}$.

830. Пусть событие A означает, что хотя бы одна гвоздика из трёх извлечённых из вазы окажется красной. Это значит, что среди этих трёх гвоздик может оказаться красной одна, две или три гвоздики. Тогда событие $\overline{A}$ означает, что все три гвоздики не являются красными. Найдём вероятность события $\overline{A}$:

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{11-4}^3}{C_{11}^3} = \frac{C_7^3}{C_{11}^3} = \frac{7}{33}.$$

Теперь найдём $P(A)$:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{7}{33} = \frac{26}{33}.$$

Значит, вероятность того, что хотя бы одна из гвоздик, извлечённых наугад из вазы, будет красной, равна $\frac{26}{33} \approx 0{,}79$.

Упражнения для повторения курса 7—9 классов

Указания и решения

877. а) После апрельского подорожания телевизор стал стоить

$$10\,000 + 10\,000 \cdot 0{,}3 = 13\,000 \text{ (р.)}.$$

После снижения цены на 40% телевизор стал стоить

$$13\,000 - 13\,000 \cdot 0{,}4 = 7800 \text{ (р.)};$$

б) пусть первоначальная цена товара была a р., тогда после повышения на 30% она стала $1{,}3a$ (р.), а после понижения на 40% — $1{,}3a \cdot 0{,}6 = 0{,}78a$ (р.). Таким образом, цена товара снизилась на $0{,}22a$, т. е. на 22%.

879. а) Пусть было x г 15%-ного раствора соли и x г 45%-ного раствора. Тогда в первом растворе содержалось $0{,}15x$ г соли, а во втором — $0{,}45x$ г соли.

В получившемся после смешивания растворе стало $0{,}15x + 0{,}45x$, т. е. $0{,}6x$ г соли. Следовательно, концентрация получившегося раствора равна $\frac{0{,}6x}{2x} \cdot 100\%$, т. е. равна 30%.

Заметим, что эту задачу можно было решать иначе. Так как смешали одинаковые количества растворов, то концентрация нового раствора равна среднему арифметическому, т. е. $\frac{15+45}{2} = 30$ (%).

880. Пусть взяли x г сливок жирностью 20% и $3x$ г сливок жирностью 10%. Жирность получившихся сливок равна

$$\frac{x \cdot 0{,}2 + 3x \cdot 0{,}1}{4x} \cdot 100\% = \frac{0{,}5x}{4x} \cdot 100\% = 12{,}5\%.$$

881. а) После первого года сумма вклада станет

$$8000 + 8000 \cdot 0{,}05 = 8400 \text{ (р.)}.$$

После второго года она станет

$$8400 + 8400 \cdot 0{,}05 = 8400 + 420 = 8820 \text{ (р.)}.$$

Можно решить эту задачу, применив формулу сложных процентов:

$$8000 \cdot (1 + 0{,}05)^2 = 8820 \text{ (р.)}.$$

885. а) Возведём в квадрат обе части данного равенства:

$$\left(\sqrt{19-6\sqrt{10}}\right)^2=19-6\sqrt{10};$$

$$\left(\sqrt{10}-3\right)^2=10-6\sqrt{10}+9=19-6\sqrt{10}.$$

Так как обе части равенства положительны, то из равенства квадратов следует искомое равенство.

Возможен другой способ решения:

$$\sqrt{19-6\sqrt{10}}=\sqrt{10-6\sqrt{10}+9}=\sqrt{\left(\sqrt{10}-3\right)^2}=\sqrt{10}-3.$$

896. а) $C_{12}^4=\dfrac{12!}{4!\cdot 8!}=\dfrac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=495;$

б) здесь речь идёт о размещениях, так как важен порядок расположения элементов.

$$A_{12}^4=12\cdot 11\cdot 10\cdot 9=132\cdot 90=11\,880.$$

907. а) Найдём корни квадратного трёхчлена x^2-x-42, решив уравнение $x^2-x-42=0$. Получим $x_1=-6$, $x_2=7$. Следовательно, $x^2-x-42=(x+6)(x-7)$.

Можно выполнить это задание иначе, представив слагаемое $-x$ в виде суммы $-7x+6x$:

$$x^2-x-42=x^2-7x+6x-42=x(x-7)+6(x-7)=$$
$$=(x-7)(x+6).$$

909. а) Из условия $\dfrac{2x+3y}{y}=7$ получим $\dfrac{2x}{y}+3=7$, отсюда $\dfrac{x}{y}=2$, $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}$.

Тогда

$$\frac{3x+2y}{x}=3+2\cdot\frac{y}{x}=3+2\cdot\frac{1}{2}=4.$$

918. а) $\dfrac{2\cdot 3^{n+2}-5\cdot 3^{n+1}}{3^{n-1}}=\dfrac{3^{n+1}(2\cdot 3-5)}{3^{n-1}}=3^{n+1-(n-1)}\cdot(6-5)=3^2=9;$

в) $\dfrac{10\cdot 6^n}{2^{n+1}\cdot 3^{n-1}}=\dfrac{10\cdot 2^n\cdot 3^n}{2^{n+1}\cdot 3^{n-1}}=\dfrac{10\cdot 3}{2}=15.$

924. а) $\dfrac{x-y}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}=\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=$

$=\dfrac{\sqrt{y}}{y}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}.$

928. Пусть скорость пешехода x км/ч, тогда скорость велосипедиста равна $(x + 8)$ км/ч. За 1,5 ч велосипедист проехал $1{,}5(x + 8)$ км. Пешеход был в пути 2 ч, за это время он прошёл $2x$ км. Имеем уравнение

$$1{,}5(x + 8) + 2x = 26; \quad 3{,}5x = 14; \quad x = 4.$$

Значит, скорость пешехода 4 км/ч, а скорость велосипедиста 12 км/ч.

930. Предположим, что надо добавить x г воды, тогда масса воды будет $(x + 300)$ г. Имеем уравнение

$$300 \cdot 0{,}2 = (x + 300) \cdot 0{,}08.$$

Решив его, получим $x = 450$.

Значит, надо добавить 450 г воды.

938. Пусть двузначное число имеет вид $10x + y$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y = x + 3, \\ (10x + y)(x + y) = 70; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x + 3, \\ (11x + 3)(2x + 3) - 70 = 0. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$22x^2 + 39x - 61 = 0; \quad x_1 = 1; \; x_2 = -\frac{61}{22}.$$

Отрицательный корень не соответствует смыслу задачи. Значит, искомое число — 14.

945. Пусть x км/ч — скорость катера в стоячей воде, тогда на путь туда и обратно по реке катер затратил $\left(\frac{75}{x+5} + \frac{75}{x-5}\right)$ ч. На путь, равный 80 км, катер затратил бы в стоячей воде $\frac{80}{x}$ ч. Имеем уравнение

$$\frac{75}{x+5} + \frac{75}{x-5} = 2 \cdot \frac{80}{x}.$$

Положительный корень этого уравнения $x = 20$. Значит, скорость катера в стоячей воде равна 20 км/ч.

948. Предположим, что турист рассчитывал ехать со скоростью x км/ч, тогда на весь путь он затратил бы $\frac{180}{x}$ ч. Имеем уравнение

$$\frac{75}{x-10} + \frac{105}{x+10} = \frac{180}{x}.$$

Решив уравнение, получим $x = 60$. Значит, скорость туриста на втором участке пути была равна 70 км/ч.

949. Пусть скорость велосипедиста равна x км/ч, тогда скорость мотоциклиста равна $(x+18)$ км/ч. Мотоциклист находился в пути $\frac{60}{x+18}$ ч, а велосипедист — $\frac{60-21}{x}$ ч. Имеем уравнение

$$\frac{39}{x}-\frac{60}{x+18}=\frac{5}{4}.$$

Положительный корень этого уравнения равен 12. Значит, скорость велосипедиста 12 км/ч.

959. Зная, что пара (8; 1) является решением уравнения $ax-3y=13$, найдём значение a:

$$a\cdot 8-3=13; \quad a=2.$$

Зная, что пара (5; −1) является решением уравнения $2x+by=5$, найдём значение b:

$$10-b=5; \quad b=5.$$

Решим получившуюся систему уравнений:

$$\begin{cases}2x-3y=13,\\ 2x+5y=5;\end{cases} \quad \begin{cases}2x-3y=13,\\ 8y=-8.\end{cases}$$

Решение системы: (5; −1).

960. Координаты точки пересечения прямых найдём, решив систему уравнений

$$\begin{cases}5x-2y=-25,\\ -4x+3y=27.\end{cases}$$

Решение системы: (−3; 5).

а) Расстояние от точки (−3; 5) до оси абсцисс равно 5;

б) расстояние от точки (−3; 5) до оси ординат равно 3;

в) расстояние от точки (−3; 5) до начала координат равно $\sqrt{9+25}$, т. е. $\sqrt{34}$.

968. Пусть в прошлом году ржи собрали x ц с гектара, а пшеницы — y ц с гектара. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases}20x+30y=2300,\\ 1{,}2x\cdot 20+1{,}3y\cdot 30=2910.\end{cases}$$

Решением системы является пара чисел $x=40$, $y=50$. Значит, в этом году ржи собрали $40\cdot 1{,}2$, т. е. 48 ц с гектара, а пшеницы собрали $50\cdot 1{,}3$, т. е. 65 ц с гектара.

970. Предположим, что надо взять x г первого сплава и y г второго сплава. Имеем уравнение $\frac{0{,}67x+0{,}87y}{x+y}=0{,}79.$

После деления числителя и знаменателя дроби на y получим

$$\frac{0{,}67\frac{x}{y}+0{,}87}{\frac{x}{y}+1}=0{,}79.$$

Отсюда $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$. Значит, сплавы нужно взять в соотношении $2:3$.

974. а) Сложив уравнения системы, получим

$$2x+2y=12; \quad x+y=6; \quad y=6-x.$$

Подставим это выражение вместо y в первое уравнение системы:

$$x+x(6-x)+6-x=11; \quad x^2-6x+5=0; \quad x_1=1;\ x_2=5.$$

Отсюда $y_1=5$; $y_2=1$.

978. $\begin{cases} x+3y=2, \\ xy=a; \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x=2-3y, \\ (2-3y)y=a. \end{cases}$

Уравнение $3y^2-2y+a=0$ имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю.

$$D=4-12a; \quad 4-12a=0 \text{ при } a=\frac{1}{3}.$$

983. Пусть первый рабочий может выполнить всю работу за x дней, а второй — за y дней. Первый рабочий работал 7 дней, а второй — 16 дней. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}, \\ \frac{7}{x}+\frac{16}{y}=1, \end{cases}$$

решением которой является пара чисел $x=15$, $y=30$. Значит, первый рабочий может выполнить работу за 15 дней, а второй — за 30 дней.

988. Для арифметической прогрессии (a_n) имеем $a_1=28$, $S_{25}=925$. Обозначим разность прогрессии через d. Тогда

$$\frac{2\cdot 28+24d}{2}\cdot 25=925.$$

Отсюда $56+24d=74$; $d=\frac{3}{4}=0{,}75$;

$$a_{30}=28+0{,}75\cdot 29=49{,}75.$$

991. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия с первым членом a_1 и разностью d. Из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 150, \\ a_1 + 12d = 110 \end{cases}$$

находим $d = -4$, $a_1 = 158$.

Зная, что $S_n = 0$, составим и решим уравнение

$$\frac{2 \cdot 158 + (-4)(n-1)}{2} \cdot n = 0;$$

$$(79 - n + 1)n = 0; \quad 80 - n = 0; \quad n = 80.$$

996. Для геометрической прогрессии (b_n) имеем $b_3 = 20$, $b_5 = 80$, $b_n > 0$ при любом n. Из соотношения $b_5 = b_3 q^2$ найдём значение знаменателя прогрессии q:

$$80 = 20q^2; \quad q^2 = 4; \quad q = 2.$$

Тогда $b_1 = \frac{b_3}{q^2} = \frac{20}{2^2} = 5;$

$$S_7 = \frac{b_1\left(q^7 - 1\right)}{q - 1};$$

$$S_7 = \frac{5 \cdot \left(128 - 1\right)}{2 - 1} = 635.$$

1007. в) $\begin{cases} x - \dfrac{4x-1}{3} < 10, \\ 4x - 1 - \dfrac{x}{3} < 10; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 4x + 1 < 30, \\ 12x - 3 - x < 30; \end{cases}$ $\begin{cases} -x < 29, \\ 11x < 33; \end{cases}$

$\begin{cases} x > -29, \\ x < 3; \end{cases}$

$x \in (-29;\ 3);$

г) $\begin{cases} 3y - \dfrac{2y+1}{2} > 4 - \dfrac{2-y}{3} - y, \\ \dfrac{5y-1}{3} - \left(y - 1\right) > 3y; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{4y-1}{2} > \dfrac{10-2y}{3}, \\ 2y + 2 > 9y; \end{cases}$ $\begin{cases} 16y > 23, \\ 7y < 2; \end{cases}$ $\begin{cases} y > 1\dfrac{7}{16}, \\ y < \dfrac{2}{7}. \end{cases}$

Эта система не имеет решений.

1008. а) $\begin{cases}(3x+2)^2 \geqslant (3x-1)(3x+1)-31, \\ (2x-3)(8x+5) < (4x-3)^2-14;\end{cases}$

$\begin{cases}9x^2+12x+4 \geqslant 9x^2-1-31, \\ 16x^2-14x-15 < 16x^2-24x+9-14;\end{cases}$

$\begin{cases}12x \geqslant -36, \\ -14x-15 < -24x-5;\end{cases}$ $\begin{cases}x \geqslant -3, \\ 10x < 10;\end{cases}$ $\begin{cases}x \geqslant -3, \\ x < 1.\end{cases}$

Целые решения: -3, -2, -1, 0.

1015. а) $\begin{cases}x^2-7x+6 \leqslant 0, \\ x^2-8x-15 \geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-1)(x-6) \leqslant 0, \\ (x-3)(x-5) \geqslant 0.\end{cases}$

Решением первого неравенства является отрезок $[1; 6]$; решением второго неравенства — множество $(-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$. Следовательно, решением системы неравенств является множество $[1; 3] \cup [5; 6]$.

Этому множеству принадлежит пять целых чисел: 1, 2, 3, 5, 6.

1032. а) $2x - 11 = -5x + 3$; $7x = 14$; $x = 2$; $y = -7$.

Прямые пересекаются в точке $(-2; 7)$;

б) $-3x - 10 = x^2 - 13x + 6$; $x^2 - 10x + 16 = 0$;

$x_1 = 2$; $x_2 = 8$; $y_1 = -16$; $y_2 = -34$.

Прямая $y = -3x - 10$ и парабола $y = x^2 - 13x + 6$ пересекаются в точках $(2; -16)$ и $(8; -34)$.

Задачи повышенной трудности

Указания и решения

1036. $2x^5 + x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = (2x^5 + x^4) - (10x^3 + 5x^2) + (8x + 4) = x^4(2x + 1) - 5x^2(2x + 1) + 4(2x + 1) = (2x + 1)(x^4 - 5x^2 + 4) = (2x + 1)(x^2 - 1)(x^2 - 4) = (2x + 1) \times (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

Отсюда $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$, $x_5 = -2$.

1037. При значении x, равном 1, многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ превращается в сумму коэффициентов $a + b + c + d$. Если коэффициенты равны -7, 4, -3 и 6 в любом порядке, то их сумма равна нулю. Следовательно, при $x = 1$ значение многочлена равно нулю, т. е. $x = 1$ — корень этого многочлена.

1038. Преобразуем данный многочлен:

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = (x^2 - 3)^2 - x(4x + 3).$$

При любом значении x имеем $(x^2 - 3)^2 \geqslant 0$. Произведение $-x(4x^2 + 3)$ положительно при $x < 0$. Следовательно, при $x < 0$ значение многочлена положительно, а значит, этот многочлен не может иметь отрицательных корней.

1039. Обозначим через x_1 и x_2 корни квадратного трёхчлена. В силу теоремы Виета:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a - 2)^2 + 2(a + 1) = \\ = a^2 - 4a + 4 + 2a + 2 = a^2 - 2a + 6 = (a - 1)^2 + 5.$$

Наименьшее значение этой суммы равно 5 при $a = 1$, следовательно, сумма квадратов корней данного трёхчлена принимает наименьшее значение при $a = 1$.

1040. Преобразуем выражение:

$$(x - a)(x - b) - c^2 = x^2 - (a + b)x + ab - c^2.$$

Вычислим дискриминант этого квадратного трёхчлена:

$$D = (a + b)^2 - 4(ab - c^2) = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4c^2 = (a - b)^2 + 4c^2.$$

При любых значениях a, b и c значение дискриминанта неотрицательно. Следовательно, этот трёхчлен имеет хотя бы один корень. Значит, график функции $y = (x - a) \times (x - b) - c^2$ имеет с осью x хотя бы одну общую точку.

1041. По определению модуля числа имеем

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0; \end{cases}$$

$$f(|x|)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x \geqslant 0, \\ f(-x), \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Чтобы построить график функции $y = |f(x)|$, надо ту часть графика функции $y = f(x)$, где $f(x) \geqslant 0$, оставить на месте, а другую его часть отразить симметрично относительно оси x.

Чтобы построить график функции $y = f(|x|)$, надо ту часть графика функции $y = f(x)$, где $x \geqslant 0$, оставить на месте, а другую его часть отразить симметрично относительно оси y.

1042. Зададим функцию двумя формулами:

$$y=\begin{cases} x^2-6x+8, \text{ если } x \leqslant 4, \\ x^2-2x-8, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Трёхчлен $x^2 - 6x + 8$ имеет корни $x_1 = 2$; $x_2 = 4$.

Трёхчлен $x^2 - 2x - 8$ не имеет корней, больших 4.

Следовательно, график функции пересекает ось x в точках (2; 0) и (4; 0).

1043. Пусть общая точка графиков данных функций имеет координаты $(x_1;\ y_1)$. Тогда $y_1 = x_1^2 - 7x_1 + a$ и $y_1 = -3x_1^2 + 5x_1 - 6$. Имеем уравнение

$$x_1^2 - 7x_1 + a = -3x_1^2 + 5x_1 - 6, \text{ т. е. } 4x_1^2 - 12x_1 + a + 6 = 0.$$

Это уравнение имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю:

$$\frac{D}{4} = 36 - 4(a+6) = 12 - 4a; \quad \frac{D}{4} = 0, \text{ если } a = 3.$$

Следовательно, графики данных функций имеют единственную общую точку при $a = 3$. Найдём её координаты:

$$4x_1^2 - 12x_1 + 9 = 0; \quad x_1 = 1{,}5;$$
$$y_1 = x_1^2 - 7x_1 + 3 = 2{,}25 - 10{,}5 + 3 = -5{,}25.$$

1044. Преобразуем данный многочлен:

$$x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 = x^4\left(x^4 + x^2 - 4 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) =$$
$$= x^4\left(\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\right).$$

Известно, что при положительных значениях a сумма $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$. Отсюда, учитывая, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения, заключаем, что $x^4 + \frac{1}{x^4} \geqslant 2$ и $x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2$.

Следовательно,

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4 \geqslant 0,$$

а значит, и

$$x^4\left(\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\right) \geqslant 0,$$

т. е. многочлен не принимает отрицательных значений.

1045. Функция $f(x) = mx^2 + (m-1)x + m - 1$ при $m \neq 0$ является квадратичной функцией, которая принимает лишь отрицательные значения, если $m < 0$ и дискриминант квадратного трёхчлена $mx^2 + (m-1)x + m - 1$ отрицателен. (В этом случае парабола расположена в нижней полуплоскости.)

Вычислим дискриминант данного квадратного трёхчлена:

$$D = (m-1)^2 - 4m(m-1) = m^2 - 2m + 1 - 4m^2 + 4m =$$
$$= -3m^2 + 2m + 1.$$

Решим систему неравенств

$$\begin{cases} m < 0, \\ -3m^2 + 2m + 1 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} m < 0, \\ 3m^2 - 2m - 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} m < 0, \\ (3m+1)(m-1) > 0. \end{cases}$$

Неравенство $(3m+1)(m-1) > 0$ выполняется при $m < -\frac{1}{3}$ или $m > 1$. Так как $m < 0$, то данной системе удовлетворяют только $m < -\frac{1}{3}$.

Значит, квадратный трёхчлен $f(x)$ принимает лишь отрицательные значения, если $m < -\frac{1}{3}$.

1046. $y = \frac{x}{x^2+1}$; $\quad yx^2 + y - x = 0.$

Решим это уравнение относительно x. Уравнение имеет корни, если его дискриминант ($D = 1 - 4y^2$) неотрицателен.

Из условия $1 - 4y^2 \geqslant 0$ найдём, что $y^2 \leqslant \frac{1}{4}$, т. е. $|y| \leqslant \frac{1}{2}$. Значит, $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$.

1047. Если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$, то

$$x_1 + x_2 = 3a, \quad x_1x_2 = a^2.$$

Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9a^2 - 2a^2 = 7a^2.$$

Имеем уравнение $7a^2 = 1,75$. Отсюда $a_1 = -0,5$; $a_2 = 0,5$.

Если $a = -0,5$, то уравнение имеет вид $x^2 + 1,5x + 0,25 = 0$. Его корни: $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{4}$, $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{4}$.

Если $a = 0,5$, то уравнение имеет вид $x^2 - 1,5x + 0,25 = 0$. Его корни: $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$, $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$.

1048. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 3,75x + a^3 = 0$ и $x_2 = x_1^2$. Тогда $x_1 + x_1^2 = 3,75$, $x_1 \cdot x_1^2 = a^3$. Отсюда $x_1^3 = a^3$, т. е. $x_1 = a$.

$$a^2 + a - 3,75 = 0; \quad a_1 = -2,5; \ a_2 = 1,5.$$

1049. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ и оба корня принадлежат интервалу $(-2; 4)$.

В силу теоремы Виета $x_1 + x_2 = 2m$, $x_1x_2 = m^2 - 1$. Отсюда $x_1 = m - 1$, $x_2 = m + 1$. Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} -2 < m - 1 < 4, \\ -2 < m + 1 < 4. \end{cases}$$

Отсюда $m \in (-1; 3)$.

1050. Введём новую переменную $y = x^2$. Уравнение примет вид

$$y^2 + ay + a - 1 = 0.$$
$$D = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2;$$
$$y_1 = -1; \ y_2 = 1 - a.$$

Уравнение $x^2 = -1$ корней не имеет. Уравнение $x^2 = 1 - a$ имеет два различных корня, если $1 - a > 0$, т. е. $a < 1$.

Следовательно, данное биквадратное уравнение имеет два различных корня, если $a < 1$.

1051. Разделив первое уравнение системы на второе, получим $\frac{8 - x}{y + 5} = \frac{1}{2}$. Отсюда $y = 11 - 2x$.

Подставив это выражение в первое уравнение, получим

$$(11 - x)(8 - x) = 10; \quad x^2 - 19x + 78 = 0.$$

Корни этого уравнения $x_1 = 6$; $x_2 = 13$. Тогда

$$y_1 = 11 - 12 = -1; \quad y_2 = 11 - 26 = -15.$$

1052. а) После деления первого уравнения на второе получим $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{149}{70}$. Отсюда $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{149}{70}$.

Обозначим $\frac{x}{y}$ через z, тогда $\frac{y}{x} = \frac{1}{z}$. Уравнение примет вид

$$z + \frac{1}{z} = \frac{149}{70}; \quad 70z^2 - 149z + 70 = 0.$$

Корни этого уравнения $z_1=\frac{7}{10}$, $z_2=\frac{10}{7}$.

Если $z=\frac{7}{10}$, то $\frac{x}{y}=\frac{7}{10}$; $x=0{,}7y$. Подставим это выражение во второе уравнение данной системы:

$$0{,}7y^2(0{,}7y-y)=210;\quad y^3=-1000;\quad y=-10;\quad x=-7.$$

Если $z=\frac{10}{7}$, то $x=\frac{10}{7}y$. Тогда

$$\frac{10}{7}y^2\left(\frac{10}{7}y-y\right)=210;\quad y^3=7^3;\quad y=7;\quad x=10.$$

Система имеет два решения: $(-7;\ -10)$ и $(10;\ 7)$;

б) разделим почленно первое уравнение на второе, учитывая, что $x+y\neq 0$. Получим

$$\frac{xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{6}{7};\quad 6x^2-13xy+6y^2=0.$$

Разделим все слагаемые этого уравнения на y^2:

$$6\frac{x^2}{y^2}-13\frac{x}{y}+6=0.$$

Введём новую переменную $z=\frac{x}{y}$. Уравнение примет вид

$$6z^2-13z+6=0.$$

Корни этого уравнения $z_1=\frac{2}{3}$, $z_2=\frac{3}{2}$.

Если $z=\frac{2}{3}$, то $x=\frac{2}{3}y$. Подставим это выражение вместо x в первое уравнение системы:

$$\frac{2}{3}y\cdot y\left(\frac{2}{3}y+y\right)=30;\quad y^3=27;\quad y=3;\quad x=2.$$

Если $z=\frac{3}{2}$, то $x=\frac{3}{2}y$. Тогда

$$\frac{3}{2}y\cdot y\left(\frac{3}{2}y+y\right)=30;\quad y^3=8;\quad y=2;\quad x=3.$$

Система имеет два решения: $(2;\ 3)$ и $(3;\ 2)$.

1053. Применив формулы суммы и разности кубов, заменим заданную систему уравнений равносильной ей системой

$$\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2-19)=0,\\(x+y)(x^2-xy+y^2-7)=0.\end{cases}$$

Эта система распадается на две системы уравнений:

$$\begin{cases} x = y, \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 7) = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 19 = 0, \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 7) = 0. \end{cases}$$

Каждая из этих систем, в свою очередь, распадается на две системы. В итоге имеем четыре системы уравнений:

$$\begin{cases} x = y, \\ x + y = 0; \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} x = y \\ x^2 - xy + y^2 - 7 = 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x = -y, \\ x^2 + xy + y^2 - 19 = 0; \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 7 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 19 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Система (1) имеет решение (0; 0); система (2) — $\left(-\sqrt{7};\ -\sqrt{7}\right)$; $\left(\sqrt{7};\ \sqrt{7}\right)$; система (3) — $\left(-\sqrt{19};\ \sqrt{19}\right)$; $\left(\sqrt{19};\ -\sqrt{19}\right)$; система (4) — (2; 3), (3; 2), (−2; −3), (−3; −2).

Таким образом, исходная система уравнений имеет девять решений.

1054. Введём новые переменные $u = x + y$, $v = xy$. Тогда

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)((x+y)^2 - 3xy) =$$
$$= u(u^2 - 3v) = u^3 - 3uv.$$

Система уравнений примет вид

$$\begin{cases} u^3 + v^3 - 3uv = 12, \\ u + v = 0. \end{cases}$$

Подставив значение $u = -v$ в первое уравнение системы, получим

$$(-v)^3 + v^3 + 3v^2 = 12; \quad v^2 = 4; \quad v_1 = -2; \ v_2 = 2.$$

Тогда $u_1 = 2$; $u_2 = -2$.

Значения x и y найдём, решив две системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = -2, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Решения первой системы: $\left(1 - \sqrt{3};\ 1 + \sqrt{3}\right)$; $\left(1 + \sqrt{3};\ 1 - \sqrt{3}\right)$. Вторая система решений не имеет. Следовательно, исходная система имеет два решения: $\left(1 - \sqrt{3};\ 1 + \sqrt{3}\right)$; $\left(1 + \sqrt{3};\ 1 - \sqrt{3}\right)$.

1055. Удобно ввести новую переменную $y = x + 4$. Тогда $x + 3 = y - 1$, $x + 5 = y + 1$. Уравнение примет вид

$$(y-1)^4 + (y+1)^4 = 4;$$
$$(y^2 - 2y + 1)^2 + (y^2 + 2y + 1)^2 = 4;$$
$$2y^4 + 12y^2 - 2 = 0; \quad y^4 + 6y^2 - 1 = 0.$$

Полученное биквадратное уравнение решим с помощью введения новой переменной $z = y^2$. Имеем

$$z_1 = -3 - \sqrt{10};\quad z_2 = -3 + \sqrt{10};\quad y_1 = \sqrt{\sqrt{10} - 3};\quad y_2 = -\sqrt{\sqrt{10} - 3}.$$

Значит,

$$x_1 = y_1 - 4 = \sqrt{\sqrt{10} - 3} - 4;\quad x_2 = y_2 - 4 = -\sqrt{\sqrt{10} - 3} - 4.$$

1056. $(x^2 + x)^4 - 1 = 0;$
$((x^2 + x)^2 - 1)((x^2 + x)^2 + 1) = 0.$
Это уравнение распадается на два:

$$(x^2 + x)^2 - 1 = 0 \text{ и } (x^2 + x)^2 + 1 = 0.$$

Второе уравнение решений не имеет, так как $(x^2 + x)^2 + 1 > 0$ при любом значении x. Первое уравнение распадается на два:

$$x^2 + x - 1 = 0 \text{ и } x^2 + x + 1 = 0.$$

Корни первого из этих уравнений $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Второе уравнение корней не имеет.

Итак, исходное уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

1057. Возведём обе части первого уравнения в куб и применим формулу $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$. Получим

$$x + y + 3\sqrt[3]{xy} \cdot 3 = 27;\quad x + y + 9 \cdot 2 = 27;\quad x + y = 9.$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 9, \\ xy = 8, \end{cases}$$

имеющую два решения: (1; 8) и (8; 1).

1058. Введём новую переменную $z = \sqrt[3]{\frac{x}{y}}$. Тогда $\sqrt[3]{\frac{y}{x}} = \frac{1}{z}$ и первое уравнение системы примет вид $z + \frac{1}{z} = 4{,}25$. Это уравнение имеет два корня: $z_1 = 4$; $z_2 = \frac{1}{4}$. Следовательно, $\frac{x}{y} = 4^3 = 64$ или $\frac{x}{y} = \frac{1}{64}$.

Решив системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 64, \\ x + y = 130 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{64}, \\ x + y = 130, \end{cases}$$

найдём два решения исходной системы: (2; 128); (128; 2).

1059. Пусть искомая дробь имеет вид $\frac{x}{y}$. По условию $y = x^2 - 1$. Если числитель и знаменатель дроби увеличить на 2, получим дробь

$$\frac{x+2}{y+2} = \frac{x+2}{x^2-1+2} = \frac{x+2}{x^2+1}.$$

Если числитель и знаменатель уменьшить на 3, получим дробь

$$\frac{x-3}{y-3} = \frac{x-3}{x^2-4}.$$

Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2+1} > \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{x-3}{x^2-4} < \dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы получаем

$$4x + 8 > x^2 + 1; \quad x^2 - 4x - 7 < 0; \quad x^2 - 4x + 4 - 11 < 0;$$
$$(x-2)^2 < 11; \quad x - 2 < \sqrt{11}; \quad x < 2 + \sqrt{11} < 2 + \sqrt{16} = 6.$$

Из второго неравенства получаем

$$10x - 30 < x^2 - 4; \quad x^2 - 10x + 26 > 0; \quad (x-5)^2 + 1 > 0.$$

Это неравенство верно при любом значении x.

Числитель второй дроби после уменьшения на 3 должен удовлетворять неравенству $x - 3 \geqslant 0$. Значит, $3 \leqslant x < 6$. В этом промежутке находится три целых числа: 3, 4 и 5.

Итак, условию задачи удовлетворяют три дроби: $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{15}$ и $\frac{5}{24}$.

1060. Прибавим 1 к левой и правой частям каждого уравнения. После преобразований система уравнений примет вид

$$\begin{cases} (1+y)(1+x) = 6, \\ (1+z)(1+y) = 12, \\ (1+x)(1+z) = 8. \end{cases}$$

Перемножив все три уравнения системы, получим

$$(1+x)^2(1+y)^2(1+z)^2 = 6\cdot 12\cdot 8 = 24^2.$$

Отсюда

$(1+x)(1+y)(1+z) = 24$ или $(1+x)(1+y)(1+z) = -24$.

Разделим первое из этих уравнений на каждое из уравнений системы:

$$1+z=4;\quad 1+x=2;\quad 1+y=3,$$
$$\text{т. е. } x=1;\quad y=2;\quad z=3.$$

После деления уравнения $(1+x)(1+y)(1+z) = -24$ на каждое из уравнений системы получим

$$1+z=-4;\quad 1+x=-2;\quad 1+y=-3,$$
$$\text{т. е. } x=-3;\ y=-4;\ z=-5.$$

Таким образом, исходная система уравнений имеет два решения: (1; 2; 3); (−3; −4; −5).

1061. Обозначим корни уравнения $x^3 - 9x^2 + mx - 15 = 0$ через x_1, x_2 и x_3.

Пусть эти корни образуют арифметическую прогрессию с разностью d и вторым членом x_2. Тогда $x_1 = x_2 - d$, $x_3 = x_2 + d$ и

$$x^3 - 9x^2 + mx - 15 = (x-(x_2-d))(x-x_2)(x-(x_2+d)).$$

Перемножив первый и третий множители в правой части равенства, а затем умножив их произведение на второй, получим

$$x^3 - 9x^2 + mx - 15 = x^3 - 3x^2x_2 + (3x_2^2 - d^2)x - x_2^3 + x_2d^2.$$

Приравняем коэффициенты при равных степенях x и свободные члены. Получим систему уравнений относительно x_2, d и m:

$$\begin{cases} 9 = 3x_2, \\ m = 3x_2^2 - d^2, \\ 15 = x_2^3 - x_2d^2. \end{cases}$$

Отсюда $x_2 = 3$; $d^2 = \dfrac{15-3^3}{-3} = 4$; $m = 3\cdot 9 - 4 = 23$.

Итак, при $m = 23$ корни уравнения образуют арифметическую прогрессию 1; 3; 5 или 5; 3; 1.

1062. Умножим на 3 все части двойного неравенства:

$$1 \leqslant 3\cdot\frac{a^2-a+1}{a^2+a+1} \leqslant 9.$$

Знаменатель a^2+a+1 положителен при любом значении a, так как $a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$.

Умножим на (a^2+a+1) все части двойного неравенства:

$$a^2+a+1 \leqslant 3a^2-3a+3 \leqslant 9a^2+9a+9.$$

Отсюда

$$0 \leqslant 2a^2-4a+2 \leqslant 8a^2+8a+8;$$
$$8a^2+8a+8-2a^2+4a-2 \geqslant 0;$$
$$6a^2+12a+6=6(a^2+2a+1)=6(a+1)^2 \geqslant 0.$$

Выполняя все преобразования в обратном порядке, получаем требуемое неравенство.

1063. Пусть первый рабочий может выполнить всю работу за x ч, второй — за y ч, третий — за z ч. Тогда производительность труда первого рабочего составляет $\frac{1}{x}$ часть работы за 1 ч, второго — $\frac{1}{y}$ часть, третьего — $\frac{1}{z}$ часть. По условию $\frac{1}{z}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right):2$. Имеем систему трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases}\frac{1}{z}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right):2,\\ \frac{48}{z}+\frac{10}{x}=1,\\ \frac{48}{z}+\frac{15}{y}=1.\end{cases}$$

Вычтем из третьего уравнения второе:

$$\frac{15}{y}-\frac{10}{x}=0; \quad y=\frac{3x}{2}.$$

Из первого уравнения найдём, что

$$\frac{1}{z}=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}\right):2, \text{ т. е. } z=\frac{6x}{5}.$$

Подставим во второе уравнение значение z:

$$\frac{48\cdot 5}{6x}+\frac{10}{x}=1.$$

Отсюда $x=50$. Тогда $y=75$, $z=60$.

1064. Пусть двузначное число имеет вид $10a+b$. По условию

$$\begin{cases}10a+b=2(a^2+b^2)+6,\\ 10a+b=4ab+6.\end{cases}$$

Отсюда

$$2a^2 + 2b^2 - 4ab = 0; \quad (a-b)^2 = 0; \quad a = b.$$

Подставим это значение во второе уравнение системы:

$$11a = 4a^2 + 6; \quad 4a^2 - 11a + 6 = 0; \quad a_1 = 2; \ a_2 = \frac{3}{4}.$$

Второй корень не удовлетворяет условию задачи. Значит, искомое число 22.

1065. Выпишем члены последовательностей (x_n) и (y_n) и подчеркнём одинаковые члены этих последовательностей:

(x_n): $\underline{1}$, 3, 5, 7, $\underline{9}$, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, $\underline{25}$, ..., $2n-1$, ...;

(y_n): $\underline{1}$, 4, $\underline{9}$, 16, $\underline{25}$, 36, ..., n^2, ...

Из одинаковых членов последовательностей (x_n) и (y_n) составим последовательность (c_n):

$$1, \ 9, \ 25, \ \ldots, \ (2n-1)^2, \ \ldots .$$

Значит, $c_n = (2n-1)^2$.

1066. $x_n = (n+4)(n-5) = n^2 - n - 20$.

Двойное неравенство $-18 \leqslant n^2 - n - 20 \leqslant 360$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} n^2 - n - 20 \geqslant -18, \\ n^2 - n - 20 \leqslant 360; \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 - n - 2 \geqslant 0, \\ n^2 - n - 380 \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (n+1)(n-2) \geqslant 0, \\ (n+19)(n-20) \leqslant 0. \end{cases}$$

Решениями первого неравенства являются все n, такие, что $n \leqslant -1$ или $n \geqslant 2$. Число n должно быть натуральным, значит, $n \geqslant 2$.

Решениями второго неравенства являются все n, такие, что $-19 \leqslant n \leqslant 20$. Число n должно быть натуральным, значит, $1 \leqslant n \leqslant 20$.

Итак, решениями данного двойного неравенства являются все натуральные числа из промежутка [2; 20].

1067. Формулу для x_n можно записать в виде

$$x_n = \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) : 2.$$

Отсюда

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) : 2; \quad x_2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) : 2; \quad x_3 = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) : 2 \ \text{ и т. д.}$$

Вычислим сумму первых n членов этой последовательности:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{3}\right):2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right):2+\ldots+\left(\frac{1}{2(n-1)-1}-\frac{1}{2(n-1)+1}\right):2+$$

$$+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right):2=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\ldots+\frac{1}{2(2n-3)}-\frac{1}{2(2n-1)}+$$

$$+\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}=\frac{2n+1-1}{2(2n+1)}=\frac{2n}{2(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

1068. Последовательность (x_n) можно задать двумя формулами:

$$x_n=\begin{cases}2a, \text{если } n \text{ — нечётное число,}\\ 2b, \text{если } n \text{ — чётное число.}\end{cases}$$

Чтобы задать последовательность (x_n) одной формулой, надо подобрать выражение, содержащее a и b, так, чтобы при нечётном n в нём обращались в нуль члены, содержащие b, а при чётном n обращались в нуль члены, содержащие a. Этому условию удовлетворяет выражение

$$x_n = a + a\cdot(-1)^{n+1} + b + b\cdot(-1)^n.$$

Действительно,

$$x_1 = a + a\cdot(-1)^2 + b + b\cdot(-1)^1 = 2a + 0 = 2a;$$
$$x_2 = a + a\cdot(-1)^3 + b + b\cdot(-1)^2 = 0 + 2b = 2b \text{ и т. д.}$$

Итак, $x_n = a + b + a\cdot(-1)^{n+1} + b\cdot(-1)^n$.

1069. Пусть (x_n) — арифметическая прогрессия. Докажем, что последовательность (y_n), где $y_n = kx_n + b$, также является арифметической прогрессией. Имеем:

$$\frac{y_{n-1}+y_{n+1}}{2}=\frac{kx_{n-1}+b+kx_{n+1}+b}{2}=k\cdot\frac{x_{n-1}+x_{n+1}}{2}+b=kx_n+b=y_n.$$

Следовательно, (y_n) — арифметическая прогрессия.

1070. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия, в которой a_n — целые числа и $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$. Известно, что $a_4 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

Обозначим разность прогрессии через d. Тогда

$$a_1 = a_2 - d;\ a_3 = a_2 + d;\ a_4 = a_2 + 2d;$$
$$(a_2 - d)^2 + a_2^2 + (a_2 + d)^2 = a_2 + 2d.$$

Отсюда

$$3a_2^2 + 2d^2 = a_2 + 2d; \quad 3a_2^2 - a_2 + 2d^2 - 2d = 0.$$

Решим это уравнение относительно a_2:

$$D = 1 - 12(2d^2 - 2d) = 1 - 24d^2 + 24d =$$
$$= -6\left(4d^2 - 4d - \frac{1}{6}\right) = -6(2d - 1)^2 + 7.$$

Дискриминант должен быть квадратом целого числа. Это возможно лишь при $2d-1=1$, т. е. при $d=1$. Тогда

$$3a_2^2-a_2=0;\quad a_2=0 \text{ или } a_2=\frac{1}{3}.$$

По условию все члены арифметической прогрессии — целые числа. Значит, $a_2=0$, а искомые числа -1, 0, 1, 2.

Если предположить, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4$, получим ответ: 2, 1, 0, -1.

1071. Обозначим сумму первых n членов последовательности (x_n) через S_n и n-й член последовательности представим в виде $x_n=\dfrac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}}{a_n-a_{n+1}}$. Тогда

$$S_n=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3}+\ldots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}}{a_n-a_{n+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}+\ldots+\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}}{-d}=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_{n+1}}}{-d}=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}}{d}.$$

После освобождения от иррациональности в числителе дроби получим

$$S_n=\frac{a_{n+1}-a_1}{d\left(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1}\right)}=\frac{a_1+dn-a_1}{d\left(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1}\right)}=\frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}}.$$

1072. Пусть стороны треугольника равны a, b и c, а высоты соответственно h_a, h_b и h_c.

Удвоенная площадь треугольника равна $a\cdot h_a=b\cdot h_b=$ $=c\cdot h_c$. Отсюда

$$\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a},\quad \frac{b}{c}=\frac{h_c}{h_b},\quad \frac{a}{c}=\frac{h_c}{h_a}.$$

Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии, которую образуют числа a, b и c. Тогда $b=aq$, $c=aq^2$. Имеем

$$\frac{h_b}{h_a}=\frac{a}{aq},\quad \frac{hc}{h_b}=\frac{aq}{aq^2},\quad \frac{h_c}{h_a}=\frac{a}{aq^2}.$$

Отсюда

$$h_b=qh_c,\quad h_a=h_cq^2.$$

Следовательно, h_c, h_b и h_a образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q.

1073. Обозначим первое из трёх чисел через a, а знаменатель геометрической прогрессии через q. Имеем числа a, aq и aq^2, сумма которых равна -3.

$$a+aq+aq^2=-3;\quad a(1+q+q^2)=-3.$$

Уравнение $xy = -3$ имеет четыре решения в целых числах: $(-1;\ 3)$, $(1;\ -3)$, $(3;\ -1)$ и $(-3;\ 1)$. Таким образом, следует решить четыре системы:

$$\begin{cases} a = -1, \\ 1 + q + q^2 = 3; \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} a = 1, \\ 1 + q + q^2 = -3; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a = 3, \\ 1 + q + q^2 = -1; \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} a = -3, \\ 1 + q + q^2 = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Система (1) имеет два решения: $a = -1$, $q = 1$ и $a = -1$, $q = -2$.

Системы (2) и (3) решений не имеют.

Система (4) имеет два решения: $a = -3$, $q = 0$ и $a = -3$, $q = -1$.

Решение $(-3;\ 0)$ не удовлетворяет условию, так как $q \neq 0$.

Получили три геометрические прогрессии:

$$-1,\ -1,\ -1; \quad -1,\ 2,\ -4; \quad -3,\ 3,\ -3.$$

По условию целые числа должны быть различными. Следовательно, это числа -1, 2 и -4.

1074. Пусть разность арифметической прогрессии равна d. Тогда арифметическую прогрессию образуют числа 1, $1 + d$ и $1 + 2d$, а геометрическую прогрессию образуют числа 1, $4 + d$, $(1 + 2d)^2$.

По характеристическому свойству геометрической прогрессии

$$(4 + d)^2 = 1 \cdot (1 + 2d)^2; \quad 16 + 8d + d^2 = 1 + 4d + 4d^2;$$

$$3d^2 - 4d - 15 = 0; \quad d_1 = -\frac{5}{3}; \ d_2 = 3.$$

Первый корень не удовлетворяет условию. Значит, искомые числа 1, 4, 7.

1075. Возведём все части двойного неравенства в n-ю степень:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} < 1.$$

Имеем $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} < 1.$

Имеем также

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}}_{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Значит, данное неравенство верно, если $n > 1$.

1076. а) Из равенства

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^3=2\sqrt{2}+3\cdot 2+3\sqrt{2}+1=5\sqrt{2}+7$$

получаем, что $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}=\sqrt{2}+1$, а из равенства

$$\left(\sqrt{2-1}\right)^3=2\sqrt{2}-3\cdot 2+3\sqrt{2}-1=5\sqrt{2}-7$$

получаем, что $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt{2}-1.$

Тогда

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2+7}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2-7}}=\sqrt{2}+1-\left(\sqrt{2}-1\right)=2;$$

б) из равенства

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^3=5\sqrt{5}+3\cdot 5+3\sqrt{5}+1=8\sqrt{5}+16=8\left(\sqrt{5}+2\right)$$

получаем, что $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$, а из равенства

$$\left(\sqrt{5}-1\right)^3=5\sqrt{5}-3\cdot 5+3\sqrt{5}-1=8\sqrt{5}-16=8\left(\sqrt{5}-2\right)$$

получаем, что $\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right).$

Тогда

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)-\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)=1.$$

1077. Умножим обе части данного равенства на 2 и перенесём все его члены в левую часть:

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=0.$$
$$(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)=0;$$
$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0.$$

Отсюда $x=y=z$.

1078. Представим левую часть уравнения как сумму двух квадратов:

$$x^2+2\sqrt{3}x+y-4\sqrt{y}+7=x^2+2\sqrt{3}x+3-3+y-4\sqrt{y}+4-4+7=$$
$$=\left(x+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{y}-2\right)^2.$$

Равенство $\left(x+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{y}-2\right)^2=0$ возможно в единственном случае: $x+\sqrt{3}=0$ и $\sqrt{y}-2=0$. Отсюда $x=-\sqrt{3}$; $y=4$.

1079. После подстановки $z^2 = -xy$ в первое уравнение получим

$$x^2 + y^2 + 2xy = 0; \quad (x + y)^2 = 0; \quad x = -y.$$

Из второго уравнения системы имеем $z = 8$, а из третьего уравнения имеем

$$y^2 = 64; \quad y_1 = -8; \quad y_2 = 8.$$

Итак, система имеет два решения: (8; −8; 8) и (−8; 8; 8).

1080. Вычтем из второго уравнения системы первое:

$$yz - y - z = 5.$$

Отсюда $y = \frac{5+z}{z-1}$, т. е. $y = 1 + \frac{6}{z-1}$.

Числа x, y, z — натуральные, следовательно, число $z - 1$ должно быть натуральным делителем числа 6, т. е. одним из чисел 1, 2, 3 или 6. Таким образом, $z_1 = 2$; $z_2 = 3$; $z_3 = 4$; $z_4 = 7$. Тогда $y_1 = 7$; $y_2 = 4$; $y_3 = 3$; $y_4 = 2$. Из первого уравнения системы находим: $x_1 = 5$; $x_2 = 7$; $x_3 = 7$; $x_4 = 5$.

Система имеет четыре решения: (5; 7; 2); (7; 4; 3); (7; 3; 4) и (5; 2; 7).

1081. $a^2 + a + 1 \geqslant 3a$, так как $a^2 + a + 1 - 3a = (a - 1)^2 \geqslant 0$.

Аналогично $b^2 + b + 1 \geqslant 3b$, $c^2 + c + 1 \geqslant 3c$.

Тогда

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \geqslant 27abc,$$

и если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)}{abc} \geqslant 27.$$

1082. Преобразуем числитель и знаменатель подкоренного выражения:

$$1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + ... + n \cdot 2n \cdot 4n = 8(1 + 2^3 + ... + n^3);$$
$$1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + ... + n \cdot 3n \cdot 9n = 27(1 + 2^3 + ... + n^3).$$

После сокращения получаем

$$\sqrt[3]{\frac{1\cdot2\cdot4+2\cdot4\cdot8+...+n\cdot2n\cdot4n}{1\cdot3\cdot9+2\cdot6\cdot18+...+n\cdot3n\cdot9n}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

1083. Умножим и разделим данное выражение на $(1 - 10)$:

$$(5+10^{n+1})(1+10+...+10^n)+1 = \frac{(5+10^{n+1})(1-10^{n+1})+(-9)}{1-10} =$$

$$= \frac{5-4\cdot10^{n+1}-10^{2n+2}-9}{-9} = \frac{10^{2n+2}+4\cdot10^{n+1}+4}{9} = \frac{(10^{n+1}+2)^2}{9} = \left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2.$$

Значение выражения $10^{n+1}+2$ при любом натуральном n является числом, кратным 3. Например, 102, 1002, ...

Значит, значение выражения $\frac{10^{n+1}+2}{3}$ при любом натуральном n является натуральным числом, поэтому $\left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2$ является квадратом натурального числа при любом натуральном n.

1084. Обозначим через a данное четырёхзначное число. Оно должно иметь вид $a = 21m^2$, где m — натуральное число.

При m, равном 1, 2, 3, 4, 5 и 6, число $21m^2$ не является четырёхзначным.

Если $m = 7$, то $a = 1029$.

Число 1029 — наименьшее четырёхзначное число, при умножении которого на 21 получится квадрат натурального числа:

$$1029 \cdot 21 = 21\,609 = 147^2.$$

1085. Пусть число x имеет вид $5a$, где $a \in \boldsymbol{N}$. По условию

$$5a = m^3 + m^2 = m^2(m + 1).$$

Один из множителей m^2 или $m + 1$ должен быть кратным 5, и при этом число $m^2(m + 1)$ должно быть трёхзначным. Найдём подбором такое число m.

Если $m = 4$, то $m^2(m + 1) = 16 \cdot 5 = 80$ не является трёхзначным числом.

Если $m = 5$, то $m^2(m + 1) = 25 \cdot 6 = 150$; $150 = 125 + 25 = 5^3 + 5^2$.

Если $m = 9$, то $m^2(m + 1) = 81 \cdot 10 = 810$; $810 = 729 + 81 = 9^3 + 9^2$.

При значениях m, равных 10, 14, 15, ..., число $m^2(m + 1)$ не является трёхзначным.

Значит, таких чисел только два: 150 и 810.

1086. Пусть m и n — натуральные числа, причём $m > n$. По условию

$$(m+n)+mn+(m-n)+\frac{m}{n}=441.$$

Частное $\frac{m}{n}$ должно быть натуральным числом, следовательно, $m = kn$, где $k \in \boldsymbol{N}$. Тогда

$$kn + n + kn^2 + kn - n + k = 441;$$
$$kn^2 + 2kn + k = 441; \quad k(n + 1)^2 = 441.$$

Отсюда $k=\frac{441}{(n+1)^2}=\frac{3^2\cdot 7^2}{(n+1)^2}$.

Для того чтобы k было натуральным числом, необходимо, чтобы выполнялось одно из равенств: $n+1=3$, или $n+1=7$, или $n+1=21$.

Тогда $n=2$, или $n=6$, или $n=20$. При этом соответствующие значения k равны $\frac{441}{9}=49$, $\frac{441}{49}=9$ или $\frac{441}{441}=1$.

Соответствующие значения m: 98, 54, 20.

По условию m и n — различные числа, следовательно, возможны только два варианта: $m=98$, $n=2$ или $m=54$, $n=6$.

1087. Пусть m и n — два натуральных числа и $m^2-n^2=45$, т. е.

$$(m-n)(m+n)=3^2\cdot 5.$$

Так как $m+n>m-n$, возможны варианты:

$$\begin{cases} m+n=15, \\ m-n=3; \end{cases} \quad \begin{cases} m+n=9, \\ m-n=5; \end{cases} \quad \begin{cases} m+n=45, \\ m-n=1. \end{cases}$$

Решение первой системы $m=9$, $n=6$; решение второй системы $m=7$, $n=2$; решение третьей системы $m=23$, $n=22$.

1088. Пусть некоторое $(n+1)$-значное число x имеет вид

$$x=10^n a+10^{n-1}b+10^{n-2}c+\dots+10l+k.$$

Представим число x в виде $10^n a+m$, где $m=10^{n-1}b+10^{n-2}c+\dots+10l+k$, т. е. m — число n-значное.

После перестановки цифры a в конец числа x получим число $10m+a$.

Предположим, что $10m+a=5(10^n a+m)$.

Тогда $5m=(5\cdot 10^n-1)a$ или $5m=4\underbrace{999\dots 9}_{n\text{ раз}}a$.

Это равенство возможно, если $a=5$. Тогда $m=4\underbrace{999\dots 9}_{n\text{ раз}}$,

т. е. m — число $(n+1)$-значное. Получили противоречие, так как число m является n-значным числом.

Следовательно, число не может увеличиться в 5 раз от перестановки первой цифры в его конец.

1089. Введём новые переменные $y=\sqrt[3]{65+x}$; $z=\sqrt[3]{65-x}$. Уравнение примет вид $y^2+4z^2-5zy=0$.

Трёхчлен, стоящий в левой части уравнения, — однородный трёхчлен второй степени. После деления всех его членов на z^2 получим

$$\left(\frac{y}{z}\right)^2 - 5\frac{y}{z} + 4 = 0.$$

Отсюда $\frac{y}{z} = 1$ или $\frac{y}{z} = 4$, т. е. $y = z$ или $y = 4z$.

Если $y = z$, т. е. $\sqrt[3]{65 + x} = \sqrt[3]{65 - x}$, то $x = 0$.

Если $y = 4z$, т. е. $\sqrt[3]{65 + x} = 4\sqrt[3]{65 - x}$, то

$$65 + x = 64(65 - x); \quad 65 + x = 4160 - 64x;$$
$$65x = 4095; \quad x = 63.$$

1090. а) $xy^2 < x$; $x \neq 0$; $y^2 < 1$; $-1 < y < 1$.

Множеством точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $xy^2 < x$, является полоса между прямыми $y = -1$ и $y = 1$, из которой исключаются точки оси y;

б) $y^2 - x^2y + 2x^2 > 2y$; $\quad y(y - x^2) - 2(y - x^2) > 0$;

$(y - 2)(y - x^2) > 0$.

Имеем две системы неравенств:

$$\begin{cases} y > 2, \\ y > x^2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y < 2, \\ y < x^2. \end{cases}$$

Множеством точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y^2 - x^2y + 2x^2 > 2y$, является объединение множеств, задаваемых этими системами;

в) $x^3 + xy^2 - 4x \leqslant 0$; $\quad x(x^2 + y^2 - 4) \leqslant 0$;

$$\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \geqslant 4 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4. \end{cases}$$

Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^3 + xy^2 - 4x \leqslant 0$, изображено на рисунке 21, *а*;

г) $x^2y + y^3 - y \geqslant 0$; $\quad y(x^2 + y^2 - 1) \geqslant 0$;

$$\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \geqslant 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2y + y^3 - y \geqslant 0$, изображено на рисунке 21, *б*.

1091. а) Множество точек, координаты которых удовлетворяют данной системе, изображено на рисунке 22, *а*;

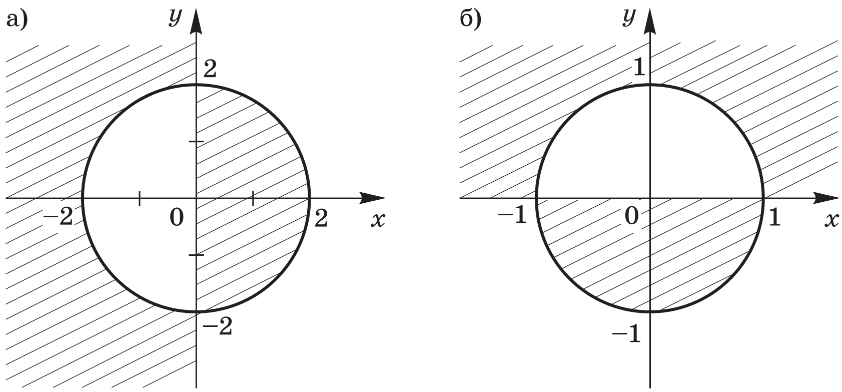

Рис. 21

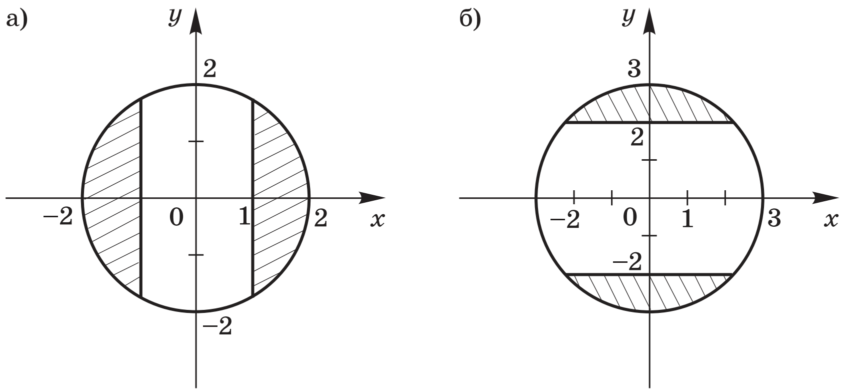

Рис. 22

б) множество точек, координаты которых удовлетворяют данной системе, изображено на рисунке 22, *б*.

1092. Общее количество равновозможных исходов при извлечении двух шаров из имеющихся четырёх равно C_4^2, т. е. равно 6.

Два чёрных шара из двух можно извлечь одним способом, как и два белых шара из двух. Следовательно, $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Вероятность извлечь два шара разных цветов как вероятность противоположного события равна $1 - \frac{1}{3}$, т. е. $P(B) = \frac{2}{3}$.

Значит, прав Олег.

1093. Общее число равновозможных исходов при извлечении двух шаров из имеющихся четырёх равно C_4^2, т. е. равно 6.

Извлечь два шара одного цвета можно тремя способами, так как $C_3^2 = 3$. Следовательно, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Два шара разных цветов можно извлечь также тремя способами, т. е. $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $P(A) = P(B)$.

1094. Будем считать, что если письмо к Мише попадёт к нему, то буква М стоит на первом месте; если письмо к Олегу попадёт к нему, то буква О стоит на втором месте; если письмо к Пете попадёт к нему, то буква П — на третьем месте. Выпишем все возможные перестановки букв М, О и П:

МОП, МПО, ОМП, ОПМ, ПМО, ПОМ.

Число перестановок $P_3 = 6$.

Событие A, состоящее в том, что все письма попадут к их адресатам, может произойти только в одном случае, значит, $P(A) = \frac{1}{6}$.

Событие B, состоящее в том, что ни одно письмо не попадёт по назначению, произойдёт в случаях ОПМ и ПМО. Значит, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Событие C, состоящее в том, что по назначению попадёт только одно из писем, может произойти в случаях МПО, ОМП и ПОМ. Значит, $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Событие D, состоящее в том, что по назначению попадут только два письма, невозможно, так как если попадут по назначению два письма, то и третье попадёт к своему адресату. Значит, $P(D) = 0$.

1095. При последовательном включении лампочек цепь будет работать, если исправны обе лампочки. Вероятность того, что исправна первая лампочка, равна $\frac{9}{10}$, вероятность того, что при этом исправна и вторая лампочка, равна $\frac{89}{99}$. Значит, искомая вероятность равна $\frac{9}{10} \cdot \frac{89}{99} \approx 0{,}809$.

1096. Всего в мешке содержится 12 шаров. Вероятность того, что первый вынутый шар окажется чёрным, равна $\frac{5}{12}$. Общее количество шаров не меняется, так как вынутый шар возвращается в мешок. Вероятность выбрать вторым шаром красный равна $\frac{4}{12}$, т. е. $\frac{1}{3}$, а вероятность выбора третьим белого шара равна $\frac{3}{12}$, т. е. $\frac{1}{4}$.

Искомая вероятность равна $\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{144}$.

1097. Одна пробоина может оказаться в мишени в двух случаях: если первый стрелок попадёт в цель, а второй промахнётся или если первый стрелок промахнётся, а второй поразит мишень.

Вероятность того, что первый стрелок попадёт, а второй промахнётся, равна $0{,}6 \cdot 0{,}7$. Вероятность того, что первый стрелок промахнётся, а второй попадёт, равна $0{,}4 \cdot 0{,}3$. Искомая вероятность равна

$$0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}42 + 0{,}12 = 0{,}54.$$

Контрольные работы

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \frac{3x-1}{12+5x}$; б) $y = \sqrt{21-14x}$.

2. Функция задана формулой $y = 35x + 15$. При каких значениях x функция принимает положительные значения? Является ли данная функция возрастающей или убывающей?

3. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $x^2 - 14x - 15$; б) $3y^2 + 7y - 6$.

---

4. Сократите дробь $\frac{3p^2+p-2}{4-9p^2}$.

5. Найдите наименьшее значение квадратного трёхчлена $x^2 + 2x - 25$ и укажите, при каком значении x трёхчлен принимает это значение.

6. Разность положительных чисел a и b равна 50. Найдите, при каких значениях a и b произведение этих чисел будет наименьшим.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \frac{7x-2}{18-10x}$; б) $y = \sqrt{8x+4}$.

2. Функция задана формулой $y = 48x + 54$. При каких значениях x функция принимает отрицательные значения? Является ли данная функция возрастающей или убывающей?

3. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

а) $y^2 - 8y + 12$; б) $6p^2 - p - 7$.

---

4. Сократите дробь $\frac{4c^2+7c-2}{1-16c^2}$.

5. Найдите наименьшее значение квадратного трёхчлена $a^2 - 12a + 20$ и укажите, при каком значении a трёхчлен принимает это значение.

6. Сумма положительных чисел c и d равна 70. При каких значениях c и d их произведение будет наибольшим?

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Постройте график функции $y = x^2 - 6x + 8$. Найдите по графику:

а) значения x, при которых функция принимает отрицательные значения;

б) промежутки возрастания функции.

2. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^2 - 8x + 12$:

а) с осью x; б) с осью y.

3. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{-64}$; б) $0{,}8\sqrt[5]{32}$.

---

4. Не выполняя построения, определите, пересекаются ли графики функций $y = 3x^2 - 1$ и $y = 2x + 20$. При положительном ответе укажите координаты точек пересечения.

5. Найдите значение выражения

$$1{,}5\sqrt[5]{-243} + 0{,}6\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}.$$

Вариант 2

1. Постройте график функции $y = x^2 - 6x + 5$. Найдите по графику:

а) значения x, при которых функция принимает положительные значения;

б) промежутки убывания функции.

2. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^2 - 2x - 24$:

а) с осью x; б) с осью y.

3. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[5]{-32}$; б) $1{,}7\sqrt[3]{64}$.

---

4. Не выполняя построения, определите, пересекаются ли графики функций $y = 2x^2 + x$ и $y = -2x + 20$. При положительном ответе укажите координаты точек пересечения.

5. Найдите значение выражения

$$1{,}2\sqrt[3]{-64} - 0{,}8\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}.$$

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. При каких значениях x равно нулю значение выражения:

а) $x^3 - 144x$; б) $\frac{x^2 - x - 156}{3x - 39}$; в) $\frac{5x^2 - 9x - 2}{x^2 - 4}$?

2. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$; б) $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$.

3. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^4 - 13x^2 - 48$ с осями координат.

---

4. Решите уравнение

$$\frac{3y + 2}{4y^2 + y} - \frac{3 - y}{16y^2 - 1} + \frac{3}{1 - 4y} = 0.$$

5. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = \frac{x^3}{x - 2}$ и $y = x^2 - 3x + 1$.

Вариант 2

1. При каких значениях x равно нулю значение выражения:

а) $x^3 - 169x$; б) $\frac{x^2 + 15x - 76}{2x + 38}$; в) $\frac{3x^2 + 11x - 42}{x^2 - 36}$?

2. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$; б) $16x^4 - 25x^2 + 9 = 0$.

3. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^4 - 4x^2 - 45$ с осями координат.

---

4. Решите уравнение

$$\frac{2x - 10}{x^2 - 3x} - \frac{x + 4}{x^2 + 3x} = \frac{2}{9 - x^2}.$$

5. Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = \frac{x^3}{x - 1}$ и $y = x^2 + 3x - 2$.

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. Решите неравенство:

а) $x^2 + 4x - 32 < 0$; б) $2x^2 - x - 55 > 0$; в) $14x < x^2$.

2. При каких значениях y трёхчлен $3y^2 + 17y - 6$ принимает отрицательные значения?

3. Используя метод интервалов, решите неравенство

$$(x-5)(x+8)(x+11) < 0.$$

---

4. При каких значениях t уравнение $4x^2 + tx + 36 = 0$ имеет два корня?

5. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{6x - 3x^2}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 24}}{2x - 16}$.

Вариант 2

1. Решите неравенство:

а) $81 - x^2 > 0$; б) $6x^2 - x - 1 < 0$; в) $5x^2 + 3x + 2 > 0$.

2. При каких значениях x трёхчлен $x^2 + x - 56$ принимает положительные значения?

3. Используя метод интервалов, решите неравенство

$$(x-16)(x+7)(x+1) > 0.$$

---

4. При каких значениях p уравнение $10x^2 + px + 40 = 0$ не имеет корней?

5. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{13x - 5x^2}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}{3x - 4}$.

Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - 3y = -1, \\ xy + 4y = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 - 5y = 27, \\ 2x - y = 7. \end{cases}$

2. Одна из сторон прямоугольника на 7 см больше другой, а его диагональ равна 13 см. Найдите стороны прямоугольника.

3. Опишите неравенством множество точек, расположенных в координатной плоскости:

а) выше параболы, задаваемой уравнением $y = x^2 + 9$;

б) вне круга с центром в начале координат и радиусом, равным 11.

---

4. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков уравнений $x^2 - y - 3 = 0$ и $y = 2x^2 - 3x - 13$.

5. Изобразите в координатной плоскости множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16, \\ y \geqslant 4 - x. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + 5y = -3, \\ xy + 11y = -36; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 - 2y = 14, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$

2. Периметр прямоугольника равен 28 см, а его диагональ равна 10 см. Найдите стороны прямоугольника.

3. Опишите неравенством множество точек, расположенных в координатной плоскости:

а) ниже параболы, задаваемой уравнением $y = -x^2 - 4$;

б) вне круга с центром в начале координат и радиусом, равным 13.

---

4. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков уравнений $x^2 + y - 10 = 0$ и $y = 3x^2 - x - 4$.

5. Изобразите в координатной плоскости множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ y \leqslant 5 - x. \end{cases}$$

Контрольная работа № 6

Вариант 1

1. Найдите двадцать первый член арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_1 = -24$ и $d = 3$.

2. Найдите сумму первых шестнадцати членов арифметической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 3$, $b_6 = 18$.

3. Является ли число 36 членом арифметической прогрессии (c_n), в которой $c_1 = -30$ и $c_6 = 25$?

---

4. Найдите сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии (b_n), заданной формулой $b_n = 3n + 1$.

5. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 6 и не превосходящих 200.

6. Найдите первый положительный член арифметической прогрессии −10; −8,5; ... .

Вариант 2

1. Найдите восемнадцатый член арифметической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 18$ и $d = -4$.

2. Найдите сумму первых девятнадцати членов арифметической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 8$, $b_7 = 20$.

3. Является ли число -20 членом арифметической прогрессии (c_n), в которой $c_1 = 16$ и $c_5 = -8$?

---

4. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n), заданной формулой $a_n = 3n - 1$.

5. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 3 и не превосходящих 160.

6. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии 11; 7,5; ... .

Контрольная работа № 7

Вариант 1

1. Найдите пятый член геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 810$, $q = -\frac{1}{3}$.

2. Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 9$, $q = -\frac{1}{3}$.

3. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия, в которой $b_7 = 162$, $q = \sqrt{3}$. Найдите b_1.

---

4. Найдите первый член геометрической прогрессии (c_n), если известно, что $c_4 = 0{,}04$, $c_6 = 40$.

5. Сумма первых четырёх членов геометрической прогрессии равна 45, а её знаменатель равен 2. Найдите сумму первых одиннадцати членов этой прогрессии.

Вариант 2

1. Найдите седьмой член геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 128$, $q = -\frac{1}{2}$.

2. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (c_n), в которой $c_1 = 64$, $q = -\frac{1}{4}$.

3. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия, в которой $b_5 = 343$, $q = \sqrt{7}$. Найдите b_1.

---

4. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если известно, что $b_5 = 8$, $b_7 = 2$.

5. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 65, а её знаменатель равен 3. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

Контрольная работа № 8

Вариант 1

1. Сколькими способами пятеро друзей могут разместиться на семи свободных местах в зрительном зале?

2. Победителю конкурса книголюбов предложили выбрать две книги из десяти различных книг. Сколькими способами он может сделать этот выбор?

3. Сколько трёхзначных чисел, в записи которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр 2, 4, 6, 7, 8?

4. Из 25 книг, стоящих на полке, 8 учебников, а остальные — художественные произведения. Наугад берут с полки одну книгу. Какова вероятность того, что она не окажется учебником?

---

5. Из 25 учащихся класса 10 мальчиков. Для работы на пришкольном участке надо выделить трёх мальчиков и двух девочек. Сколькими способами это можно сделать?

6. На четырёх карточках написаны цифры 2, 3, 6, 7. Карточки перевернули и перемешали. Затем положили их в ряд и открыли. Какова вероятность того, что в результате получилось число 7632?

Вариант 2

1. Сколькими способами можно составить расписание на один день, если известно, что в этот день изучаются шесть различных учебных предметов и на каждый из них отводится один урок?

2. Сколькими способами шесть человек, вошедших в автобус, могут разместиться на 10 свободных местах?

3. Сколько трёхзначных чисел, в записи которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр 1, 3, 5, 6, 7, 9?

4. В доме 80 квартир, четыре из которых расположены на первом этаже. Квартиры распределяются по жребию. Какова вероятность того, что жильцу не достанется квартира, расположенная на первом этаже?

---

5. Из 10 книг и 15 журналов, стоящих на полке, надо выбрать 2 книги и 3 журнала. Сколькими способами это можно сделать?

6. На пяти карточках написаны буквы «о», «п», «р», «с», «т». Карточки перевернули и перемешали. Затем положили их в ряд и открыли. Какова вероятность того, что в результате получилось слово «спорт»?

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 27, \\ 2(x-1) - (y+6) = 1. \end{cases}$$

2. Сократите дробь $\frac{2x^2 - 5x - 3}{21 - 7x}$.

3. При каких значениях t уравнение $18x^2 + tx + 2 = 0$ имеет два корня?

4. В ящике находится 12 белых, 4 чёрных и 6 жёлтых шаров одинаковых размеров. Из ящика достают один шар. Какова вероятность того, что он окажется белым или жёлтым?

---

5. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков уравнений $x - 3y = 2$ и $xy + y = 6$.

6. В фермерском хозяйстве под гречиху были отведены два участка. С первого участка собрали 105 ц гречихи, а со второго, площадь которого на 3 га больше, собрали 152 ц. Найдите площадь каждого участка, если известно, что на первом участке собрали с каждого гектара на 2 ц гречихи больше, чем со второго.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y^2 = 25, \\ (x-2) - 2(y-1) = 3. \end{cases}$$

2. Сократите дробь $\frac{3x^2 - 10x - 8}{4 - 2x}$.

3. При каких значениях t уравнение $4x^2 + tx + 9 = 0$ не имеет корней?

4. В пакете находится 10 красных, 6 жёлтых и 8 белых пуговиц одинакового размера. Из пакета наугад достают одну пуговицу. Какова вероятность того, что она окажется красной или белой?

---

5. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков уравнений $2x - y = 7$ и $x^2 + xy = 6$.

6. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 45 км, выехал велосипедист. Через 30 мин вслед за ним из пункта A выехал второй велосипедист, который прибыл в пункт B на 15 мин раньше первого. Найдите скорость каждого велосипедиста, если известно, что скорость первого была на 3 км/ч меньше скорости второго.

Тест для итогового зачёта[1]

Вариант 1

1. Сколько общих точек имеют парабола $y = x^2 - 6x + 5$ и прямая $y = 217$?

А. Ни одной **Б.** Одну **В.** Две **Г.** Три

2. В какой координатной четверти расположена вершина параболы $y = 6x^2 - x - 25$?

А. В первой **Б.** Во второй
В. В третьей **Г.** В четвёртой

3. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \frac{-1{,}6}{x}$?

А. В первой и третьей **Б.** Во второй и четвёртой
В. В первой и второй **Г.** В третьей и четвёртой

4. Решите уравнение $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

Ответ: ______________

5. Найдите область определения функции $y = \sqrt{12 - 8x + x^2}$.

Ответ: ______________

6. Найдите множество решений неравенства $(x^2 - 16) \times$ $\times (x - 5) < 0$.

А. $(-\infty;\ -4)$ **Б.** $(-4;\ 5)$
В. $(-4;\ 4) \cup (5;\ +\infty)$ **Г.** $(-\infty;\ -4) \cup (4;\ 5)$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -11, \\ x + y = -1. \end{cases}$$

Ответ: ______________

8. Какое из данных чисел не является членом арифметической прогрессии 12, 15, 18, ... ?

А. 30 **Б.** 36 **В.** 42 **Г.** 56

[1] По результатам выполнения теста ставится зачёт, если верно или с небольшими погрешностями сделана половина заданий.

9. Известно, что (b_n) — геометрическая прогрессия, в которой $b_1 = 96$, $q = -\frac{1}{4}$. Какое из неравенств не является верным?

А. $b_2 < b_1$ **Б.** $b_5 > b_4$ **В.** $b_6 < b_5$ **Г.** $b_7 < b_8$

10. Сравните $(n+1)!n$ и $n!(n+1)$, где n — натуральное число.

А. $(n+1)!n > n!(n+1)$
Б. $(n+1)!n < n!(n+1)$
В. $(n+1)!n = n!(n+1)$
Г. Ответ зависит от значения n

11. Из 16 спортсменок тренер должен выделить четырёх для участия в соревнованиях. Сколькими способами он может это сделать? Какой вид комбинаций рассматривается в этой задаче?

А. Перестановки **Б.** Размещения
В. Сочетания **Г.** Ни один из указанных видов

12. Из 32 экзаменационных билетов Игорь не успел подготовить 3 первых и 5 последних. Какова вероятность того, что ему достанется подготовленный билет?

А. $\frac{1}{4}$ **Б.** $\frac{3}{4}$ **В.** $\frac{29}{32}$ **Г.** $\frac{27}{32}$

Вариант 2

1. Сколько общих точек имеют парабола $y = x^2 - 4x + 6$ и прямая $y = 11$?

А. Ни одной **Б.** Одну **В.** Две **Г.** Три

2. В какой координатной четверти расположена вершина параболы $y = 2x^2 + 3x - 5$?

А. В первой **Б.** Во второй
В. В третьей **Г.** В четвёртой

3. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \frac{0{,}9}{x}$?

А. В первой и третьей **Б.** Во второй и четвёртой
В. В первой и второй **Г.** В третьей и четвёртой

4. Решите уравнение $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.
Ответ: ________________

5. Найдите область определения функции $y = \sqrt{10 - 7x + x^2}$.
Ответ: ________________

6. Найдите множество решений неравенства $(x^2 - 9) \times$ $\times (x + 4) < 0$.

А. $(-\infty;\ -4) \cup (-3;\ 3)$ **Б.** $(-\infty;\ -4)$
В. $(-3;\ 3)$ **Г.** $(-4;\ -3) \cup (3;\ +\infty)$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 - xy = 33, \\ x - y = 11. \end{cases}$$

Ответ: ________________

8. Какое из данных чисел не является членом арифметической прогрессии 16, 20, 24, ... ?

А. 44 **Б.** 52 **В.** 68 **Г.** 94

9. Известно, что (b_n) — геометрическая прогрессия, в которой $b_1 = -128$, $q = -\frac{1}{2}$. Какое из неравенств не является верным?

А. $b_7 < b_8$ **Б.** $b_4 > b_3$ **В.** $b_4 > b_5$ **Г.** $b_9 > b_8$

10. Сравните $(n + 2)!(n + 1)$ и $(n + 1)!(n + 2)$.

А. $(n + 2)!(n + 1) > (n + 1)!(n + 2)$
Б. $(n + 2)!(n + 1) < (n + 1)!(n + 2)$
В. $(n + 2)!(n + 1) = (n + 1)!(n + 2)$
Г. Ответ зависит от значения n

11. Из 15 спортсменок тренер должен выделить четырёх для участия в эстафете, указав при этом, кто побежит на первом, втором, третьем и четвёртом этапах. Сколькими способами он может это сделать? Какой вид комбинаций рассматривается в этой задаче?

А. Перестановки **Б.** Размещения
В. Сочетания **Г.** Ни один из указанных видов

12. В доме 80 квартир, из которых 4 находятся на первом этаже и 6 на последнем. Квартиры распределяются по жребию. Какова вероятность того, что жильцу не достанется квартира, расположенная на первом или на последнем этаже?

А. $\frac{1}{8}$ **Б.** $\frac{1}{20}$ **В.** $\frac{3}{40}$ **Г.** $\frac{7}{8}$

Примерное планирование учебного материала

I вариант — 3 ч в неделю, всего 102 ч
II вариант — 4 ч в неделю, всего 136 ч

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
Глава I. Квадратичная функция		**22**	**29**
1	Функции и их свойства	5	7
2	Квадратный трёхчлен	4	5
	Контрольная работа № 1	1	1
3	Квадратичная функция и её график	8	11
4	Степенная функция. Корень n-й степени	3	4
	Контрольная работа № 2	1	1
Глава II. Уравнения и неравенства с одной переменной		**16**	**20**
5	Уравнения с одной переменной	8	11
	Контрольная работа № 3	1	1
6	Неравенства с одной переменной	6	7
	Контрольная работа № 4	1	1
Глава III. Уравнения и неравенства с двумя переменными		**17**	**23**
7	Уравнения с двумя переменными и их системы	12	15
8	Неравенства с двумя переменными и их системы	4	7
	Контрольная работа № 5	1	1
Глава IV. Арифметическая и геометрическая прогрессии		**15**	**17**
9	Арифметическая прогрессия	7	8
	Контрольная работа № 6	1	1

Продолжение

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов	
		I	II
10	Геометрическая прогрессия Контрольная работа № 7	6 1	7 1
Глава V. Элементы комбинаторики и теории вероятностей		**15**	**18**
11 12	Элементы комбинаторики Начальные сведения из теории вероятностей Контрольная работа № 8	9 5 1	11 6 1
Повторение		**17**	**29**
	Итоговый зачёт Итоговая контрольная работа	1 2	1 2

Оглавление

11ea89c2-e99f-11e0-85ca-001018890642

Учебное издание

Миндюк Нора Григорьевна
Шлыкова Инга Соломоновна

АЛГЕБРА
Методические рекомендации
9 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Г. Войлокова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *И. В. Губиной*
Техническое редактирование
и компьютерная вёрстка *Е. В. Власовой*
Корректоры *И. А. Григалашвили, И. В. Чернова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 20.07.16. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 50 экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство «Высшая школа».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.
Тел.: +7(4812) 31-11-96. Факс: +7(4812) 31-31-70.
E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru

А Л Г Е Б Р А

Примерная рабочая программа

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Рабочая программа основного общего образования по алгебре составлена на основе Фундаментального ядра содержания общего образования и Требований к результатам освоения основной общеобразовательной программы основного общего образования, представленных в Федеральном государственном образовательном стандарте общего образования. В ней также учитываются основные идеи и положения Программы развития и формирования универсальных учебных действий для основного общего образования.

Сознательное овладение учащимися системой алгебраических знаний и умений необходимо в повседневной жизни для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Практическая значимость школьного курса алгебры обусловлена тем, что её объектом являются количественные отношения действительного мира. Математическая подготовка необходима для понимания принципов устройства и использования современной техники, восприятия научных и технических понятий и идей. Математика является языком науки и техники. С её помощью моделируются и изучаются явления и процессы, происходящие в природе.

Алгебра является одним из опорных предметов основной школы: она обеспечивает изучение других дисциплин. В первую очередь это относится к предметам естественно-научного цикла, в частности к физике. Развитие логического мышления учащихся при обучении алгебре способствует усвоению предметов гуманитарного цикла. Практические умения и навыки алгебраического характера необходимы для трудовой и профессиональной подготовки школьников.

Развитие у учащихся правильных представлений о сущности и происхождении алгебраических абстракций, соотношении реального и идеального, характере отражения математической наукой явлений и процессов реального мира, месте алгебры в системе наук и роли математического моделирования в научном познании и в практике способствует формированию научного мировоззрения учащихся и качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе.

Требуя от учащихся умственных и волевых усилий, концентрации внимания, активности развитого воображения, алгебра развивает нравственные черты личности (настойчивость, целеустремлённость, творческую активность, самостоятельность, ответственность, трудолюбие, дисциплину и критичность мышления) и умение аргументированно отстаивать свои взгляды и убеждения, а также способность принимать самостоятельные решения.

Изучение алгебры, функций, вероятности и статистики существенно расширяет кругозор учащихся, знакомя их с индукцией и дедукцией, обобщением и конкретизацией, анализом и синтезом, классификацией и систематизацией, абстрагированием, аналогией. Активное использование задач на всех этапах учебного процесса развивает творческие способности школьников.

Изучение алгебры позволяет формировать умения и навыки умственного труда — планирование своей работы, поиск рациональных путей её выполнения, критическую оценку результатов. В процессе изучения алгебры школьники должны научиться излагать свои мысли ясно и исчерпывающе, лаконично и ёмко, приобрести навыки чёткого, аккуратного и грамотного выполнения математических записей.

Важнейшей задачей школьного курса алгебры является развитие логического мышления учащихся. Сами объекты математических умозаключений и принятые в алгебре правила их конструирования способствуют формированию умений обосновывать и доказывать суждения, приводить чёткие определения, развивают логическую интуицию, кратко и наглядно раскрывают механизм логических построений и учат их применению. Тем самым алгебра занимает одно из ведущих мест в формировании научно-теоретического мышления школьников. Раскрывая внутреннюю гармонию математики, формируя понимание красоты и изящества математических рассуждений, алгебра вносит значительный вклад в эстетическое воспитание учащихся.

Общая характеристика курса. В курсе алгебры можно выделить следующие основные содержательные линии: арифметика; алгебра; функции; вероятность и статистика. Наряду с этим в содержание включены два дополнительных методологических раздела: логика и множества; математика в историческом развитии, что связано с реализацией целей общеинтеллектуального и общекультурного развития учащихся. Содержание каждого из этих разделов разворачивается в содержательно-методическую линию, пронизывающую все основные содержательные линии. При этом первая линия — «Логика и множества» — служит цели овладения учащимися некоторыми элементами универсального математического языка, вторая — «Математика в историческом развитии» — способствует созданию общекультурного, гуманитарного фона изучения курса.

Содержание линии «Арифметика» служит базой для дальнейшего изучения учащимися математики, способствует развитию их логического мышления, формированию умения пользоваться алгоритмами, а также приобретению практических навыков, необходимых в повседневной жизни. Развитие понятия о числе в основной школе связано с рациональными и иррациональными числами, формированием первичных представлений о действительном числе.

Содержание линии «Алгебра» способствует формированию у учащихся математического аппарата для решения задач из разделов математики, смежных предметов и окружающей реальности. Язык алгебры подчёркивает значение математики как языка для построения математических моделей процессов и явлений реального мира.

Развитие алгоритмического мышления, необходимого, в частности, для освоения курса информатики, и овладение навыками дедуктивных рассуждений также являются задачами изучения алгебры. Преобразование символьных форм вносит специфический вклад в развитие воображения учащихся, их способностей к математическому творчеству. В основной школе материал группируется вокруг рациональных выражений.

Содержание раздела «Функции» нацелено на получение школьниками конкретных знаний о функции как важнейшей математической модели для описания и исследования разнообразных процессов. Изучение этого материала способствует развитию у учащихся умения использовать различные языки математики (словесный, символический, графический), вносит вклад в формирование представлений о роли математики в развитии цивилизации и культуры.

Раздел «Вероятность и статистика» — обязательный компонент школьного образования, усиливающий его прикладное и практическое значение. Этот материал необходим, прежде всего, для формирования у учащихся функциональной грамотности — умения воспринимать и критически анализировать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей, производить простейшие вероятностные расчёты. Изучение основ комбинаторики позволит учащемуся осуществлять рассмотрение случаев, перебор и подсчёт числа вариантов, в том числе в простейших прикладных задачах.

При изучении статистики и вероятности обогащаются представления о современной картине мира и методах его исследования, формируется понимание роли статистики как источника социально значимой информации и закладываются основы вероятностного мышления.

Место предмета в учебном плане. Базисный учебный (образовательный) план на изучение алгебры в 7—9 классах основной школы отводит 3 часа в неделю в течение каждого года обучения, всего 315 уроков на базовом уровне и не менее 4 ч в неделю на углублённом уровне.

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ КУРСА АЛГЕБРЫ В 7—9 КЛАССАХ

Для обеспечения возможности успешного продолжения образования на базовом и углублённом (выделено *курсивом*) уровнях выпускник получит возможность научиться в 7—9 классах:

Элементы теории множеств и математической логики

• Оперировать[1] понятиями: множество, *характеристики множества,* элемент множества*, пустое, конечное и бесконечное множество*, подмножество, принадлежность, *включение, равенство множеств*;

• *изображать множества и отношение множеств с помощью кругов Эйлера*;

• *определять принадлежность элемента множеству, объединению и пересечению множеств*;

• задавать множество перечислениемего элементов, *словесного описания*;

• находить пересечение, объединение, подмножество в простейших ситуациях;

• оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, доказательство, *высказывание, истинность и ложность высказывания, отрицание высказываний, операции над высказываниями: и, или, не, условные высказывания (импликации)*;

• приводить примеры и контрпримеры для подтвержнения своих высказываний;

• *строить высказывания, отрицания высказываний.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• использовать графическое представление множеств для описания реальных процессов и явлений при решении задач из других учебных предметов;

• *строить цепочки умозаключений на основе использования правил логики*;

• *использовать множества, операции с множествами, их графическое представление для описания реальных процессов и явлений.*

Числа

• Оперировать понятиями: натуральное число, целое число, обыкновенная дробь, десятичная дробь, смешанная дробь, рациональное число, арифметический квадратный корень;

[1] Здесь и далее на:
базовом уровне — распознавать конкретные примеры общих понятий по характерным признакам, выполнять действия в соответствии с определением и простейшими свойствами понятий, конкретизировать примерами общие понятия;
углублённом уровне — знать определение понятия, уметь пояснять его смысл, уметь использовать понятие и его свойства при проведении рассуждений, доказательств, решении задач.

• *оперировать понятиями: множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, иррациональное число, квадратный корень, множество действительных чисел, геометрическая интерпретация натуральных, целых, рациональных, действительных чисел*;

• *понимать и объяснять смысл позиционной записи натурального числа*;

• использовать свойства чисел и правила действий при выполнении вычислений, *в том числе с использованием приёмов рациональных вычислений*;

• использовать признаки делимости на 2, 5, 3, 9, 10 при выполнении вычислений и решении несложных задач;

• выполнять округление рациональных чисел в соответствии с правилами и *с заданной точностью*;

• оценивать значение квадратного корня из положительного целого числа;

• распознавать рациональные и иррациональные числа и *сравнивать их*;

• *представлять рациональное число в виде десятичной дроби*;

• *упорядочивать числа, записанные в виде обыкновенной и десятичной дроби*;

• находить НОД и НОК чисел и *использовать их при решении задач.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• оценивать результаты вычислений при решении практических задач;

• выполнять сравнение чисел в реальных ситуациях;

• составлять числовые выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов;

• *применять правила приближённых вычислений при решении практических задач и решении задач из других учебных предметов*;

• *выполнять сравнение результатов вычислений при решении практических задач, в том числе приближённых вычислений*;

• *составлять и оценивать числовые выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов*;

• *записывать и округлять числовые значения реальных величин с использованием разных систем измерения.*

Тождественные преобразования

• Оперировать понятиями: степень с натуральным показателем, степень с целым отрицательным показателем;

• выполнять несложные преобразования для вычисления значений числовых выражений, содержащих степени с натуральным показателем, степени с целым отрицательным показателем;

• выполнять преобразования целых выражений: раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые; *действия с одночленами (сложение, вычитание, умножение), действия с многочленами (сложение, вычитание, умножение)*;

• использовать формулы сокращённого умножения (квадрат суммы, квадрат разности, разность квадратов) для упрощения вычислений значений выражений;

• *выполнять разложение многочленов на множители одним из способов: вынесение за скобку, группировка, использование формул сокращённого умножения*;

• *выделять квадрат суммы и разности одночленов*;

• *раскладывать на множители квадратный трёхчлен*;

• *выполнять преобразования выражений, содержащих степени с целыми отрицательными показателями, переходить от записи в виде степени с целым отрицательным показателем к записи в виде дроби*;

• выполнять несложные преобразования дробно-линейных выражений и выражений с квадратными корнями, *а также сокращение дробей, приведение алгебраических дробей к общему знаменателю, сложение, умножение, деление алгебраических дробей, возведение алгебраической дроби в натуральную и целую отрицательную степень*;

• *выполнять преобразования выражений, содержащих квадратные корни*;

• *выделять квадрат суммы или разности двучлена в выражениях, содержащих квадратные корни*;

• *выполнять преобразования выражений, содержащих модуль.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• понимать смысл записи числа в стандартном виде;

• оперировать на базовом уровне понятием «стандартная запись числа».

• *выполнять преобразования и действия с числами, записанными в стандартном виде*;

• *выполнять преобразования алгебраических выражений при решении задач других учебных предметов.*

Уравнения и неравенства

• Оперировать понятиями: равенство, числовое равенство, уравнение, числовое неравенство, неравенство, корень уравнения, решение уравнения, решение неравенства, *равносильные уравнения, область определения уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств)*;

• проверять справедливость числовых равенств и неравенств;

• решать линейные неравенства и несложные неравенства, сводящиеся к линейным;

• решать линейные уравнения и *уравнения, сводимые к линейным,* с помощью тождественных преобразований;

• проверять, является ли данное число решением уравнения (неравенства);

• решать квадратные уравнения по формуле корней квадратного уравнения;

• *решать квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным, с помощью тождественных преобразований*;

• решать системы несложных линейных уравнений, неравенств;

• изображать решения неравенств и их систем на числовой прямой;

• *решать дробно-линейные уравнения*;

• *решать простейшие иррациональные уравнения вида* $\sqrt{f(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$;

• *решать уравнения вида* $x^n = a$;

• *решать уравнения способом разложения на множители и замены переменной*;

• *использовать метод интервалов для решения целых и дробно-рациональных неравенств*;

• *решать линейные уравнения и неравенства с параметрами*;

• *решать несложные квадратные уравнения с параметром*;

• *решать несложные системы линейных уравнений с параметрами*;

• *решать несложные уравнения в целых числах.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• составлять и решать линейные уравнения и *квадратные уравнения, уравнения, к ним сводящиеся, системы линейных уравнений, неравенств* при решении задач из других учебных предметов;

• *выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении линейных и квадратных уравнений и систем линейных уравнений и неравенств при решении задач других учебных предметов*;

• *выбирать соответствующие уравнения, неравенства или их системы для составления математической модели заданной реальной ситуации или прикладной задачи*;

• *уметь интерпретировать полученный при решении уравнения, неравенства или системы результат в контексте заданной реальной ситуации или прикладной задачи.*

Функции

• Оперировать понятиями: *функциональная зависимость,* функция, график функции, способы задания функции, аргумент и значение функции, область определения и множество значений функции, нули функции, *промежутки знакопостоянства, монотонность функции, чётность/нечётность функции*;

• находить значение функции по заданному значению аргумента;

• находить значение аргумента по заданному значению функции в несложных ситуациях;

• определять положение точки по её координатам, координаты точки по её положению на координатной плоскости;

• по графику находить область определения, множество значений, нули функции, промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения функции;

• строить график линейной функции;

• проверять, является ли данный график графиком заданной функции (линейной, квадратичной, обратной пропорциональности);

• определять приближённые значения координат точки пересечения графиков функций;

• *строить графики линейной, квадратичной функций, обратной пропорциональности, функций вида:* $y = a + \dfrac{k}{x+b}$, $y = \sqrt{x}$, $x = \sqrt[3]{x}$, $y = |x|$;

• *на примере квадратичной функции, использовать преобразования графика функции* $y = f(x)$ *для построения графика функции* $y = af(kx + b) + c$;

• *составлять уравнения прямой по заданным условиям: проходящей через две точки с заданными координатами, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой*;

• *исследовать функцию по её графику*;

• *находить множество значений, нули, промежутки знакопостоянства, монотонности квадратичной функции*;

• оперировать на базовом уровне понятиями: последовательность, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия;

• решать простые задачи на прогрессии, в которых ответ может быть получен непосредственным подсчётом без применения формул;

• *решать задачи на арифметическую и геометрическую прогрессию.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• использовать графики реальных процессов и зависимостей для определения их свойств (наибольшие и наименьшие значения, промежутки возрастания и убывания, области положительных и отрицательных значений и т. п.);

• использовать свойства линейной функции и её график при решении задач из других учебных предметов;

• *иллюстрировать с помощью графика реальную зависимость или процесс по их характеристикам*;

• *использовать свойства и график квадратичной функции при решении задач из других учебных предметов.*

Текстовые задачи

• Решать несложные сюжетные задачи разных типов на все арифметические действия;

• решать простые и *сложные задачи разных типов, а также задачи повышенной трудности*;

• строить модель условия задачи (в виде таблицы, схемы, рисунка), в которой даны значения двух из трёх взаимосвязанных величин, с целью поиска решения задачи; *использовать разные краткие записи как модели текстов сложных задач для построения поисковой схемы и решения задач*;

• *различать модель текста и модель решения задачи, конструировать к одной модели решения несложной задачи разные модели текста задачи*;

• осуществлять способ поиска решения задачи, в котором рассуждение строится от условия к требованию или от требования к условию; *знать и применять оба способа поиска решения задач (от требования к условию и от условия к требованию)*;

• решать несложные логические задачи методом рассуждений, *моделировать рассуждения при поиске решения задач с помощью граф-схемы*;

• *решать логические задачи разными способами, в том числе с двумя блоками и с тремя блоками данных с помощью таблиц*;

• составлять план решения задачи; выделять этапы решения задачи *и содержание каждого этапа*;

• *уметь выбирать оптимальный метод решения задачи и осознавать выбор метода, рассматривать различные методы, находить разные решения задачи, если возможно*;

• *анализировать затруднения при решении задач*;

• *выполнять различные преобразования предложенной задачи, конструировать новые задачи из данной, в том числе обратные*;

• *интерпретировать вычислительные результаты в задаче, исследовать полученное решение задачи*;

• *анализировать всевозможные ситуации взаимного расположения двух объектов и изменение их характеристик при совместном движении (скорость, время, расстояние) при решении задач на движение двух объектов как в одном, так и в противоположных направлениях*;

• знать различие скоростей объекта в стоячей воде, против течения и по течению реки; *исследовать всевозможные ситу-*

ации при решении задач на движение по реке, рассматривать разные системы отсчёта;

• решать задачи на нахождение части числа и числа по его части, *решать разнообразные задачи «на части»*;

• *решать и обосновывать своё решение задач (выделять математическую основу) на нахождение части числа и числа по его части на основе конкретного смысла дроби*;

• находить процент от числа, число по его проценту, процентное отношение двух чисел, процентное снижение или процентное повышение величины;

• *решать задачи на проценты, в том числе сложные проценты с обоснованием, используя разные способы*;

• решать, *осознавать и объяснять идентичность* задачи разных типов (на работу, на покупки, на движение), связывающих три величины, выделять эти величины и отношения между ними, *применять их при решении задач, конструировать собственные задачи указанных типов*;

• *владеть основными методами решения задач на смеси, сплавы, концентрации*;

• *решать задачи по комбинаторике и теории вероятностей на основе использования изученных методов и обосновывать решение*;

• *решать несложные задачи по математической статистике*;

• *овладевать основными методами решения сюжетных задач: арифметический, алгебраический, перебор вариантов, геометрический, графический, применять их в новых по сравнению с изученными ситуациях.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• выдвигать гипотезы о возможных предельных значениях искомых величин в задаче (делать прикидку);

• *выделять при решении задач характеристики рассматриваемой в задаче ситуации, отличные от реальных (те, от которых абстрагировались), конструировать новые ситуации с учётом этих характеристик, в частности при решении задач на концентрации учитывать плотность вещества*;

• *решать и конструировать задачи на основе рассмотрения реальных ситуаций, в которых не требуется точный вычислительный результат.*

Статистика и теория вероятностей

• Иметь представление о статистических характеристиках, вероятности случайного события, комбинаторных задачах;

• решать простейшие комбинаторные задачи методом прямого и организованного перебора;

• представлять данные в виде таблиц, диаграмм, графиков;

• читать информацию, представленную в виде таблицы, диаграммы, графика;

• определять основные статистические характеристики числовых наборов;

• оценивать вероятность события в простейших случаях;

• иметь представление о роли закона больших чисел в массовых явлениях;

• *оперировать понятиями: столбчатые и круговые диаграммы, таблицы данных, среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения выборки, размах выборки, дисперсия и стандартное отклонение, случайная изменчивость*;

• *извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках*;

• *составлять таблицы, строить диаграммы и графики на основе данных*;

• *оперировать понятиями: факториал числа, перестановки и сочетания, треугольник Паскаля*;

• *применять правило произведения при решении комбинаторных задач*;

• *оперировать понятиями: случайный опыт, случайный выбор, испытание, элементарное случайное событие (исход), классическое определение вероятности случайного события, операции над случайными событиями*;

• *представлять информацию с помощью кругов Эйлера*;

• *решать задачи на вычисление вероятности с подсчётом количества вариантов с помощью комбинаторики.*

В повседневной жизни и при изучении других предметов:

• оценивать количество возможных вариантов методом перебора;

• иметь представление о роли практически достоверных и маловероятных событий;

• сравнивать основные статистические характеристики, полученные в процессе решения прикладной задачи, изучения реального явления;

• оценивать вероятность реальных событий и явлений в несложных ситуациях;

• извлекать, интерпретировать и *преобразовывать* информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства и характеристики реальных процессов и явлений;

• *определять статистические характеристики выборок по таблицам, диаграммам, графикам, выполнять сравнение в зависимости от цели решения задачи*;

• *оценивать вероятность реальных событий и явлений.*

История математики

• Описывать отдельные выдающиеся результаты, полученные в ходе развития математики как науки;

• знать примеры математических открытий и их авторов в связи с отечественной и всемирной историей;

• понимать роль математики в развитии России;

• *характеризовать вклад выдающихся математиков в развитие математики и иных научных областей.*

Методы математики

• Выбирать подходящий изученный метод для решении изученных типов математических задач;

• приводить примеры математических закономерностей в окружающей действительности и произведениях искусства;

• *используя изученные методы, проводить доказательство, выполнять опровержение*;

• *выбирать изученные методы и их комбинации для решения математических задач*;

• *использовать математические знания для описания закономерностей в окружающей действительности и произведениях искусства*;

• *применять простейшие программные средства и электронно-коммуникационные системы при решении математических задач.*

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ В 7—9 КЛАССАХ

(Содержание, выделенное *курсивом*,
изучается на углублённом уровне)

Числа

Рациональные числа. Множество рациональных чисел. Сравнение рациональных чисел. Действия с рациональными числами. *Представление рационального числа десятичной дробью.*

Иррациональные числа. Понятие иррационального числа. Распознавание иррациональных чисел. Примеры доказательств в алгебре. Иррациональность числа $\sqrt{2}$. Применение в геометрии. *Сравнение иррациональных чисел. Множество действительных чисел.*

Тождественные преобразования

Числовые и буквенные выражения. Выражение с переменной. Значение выражения. Подстановка выражений вместо переменных.

Целые выражения. Степень с натуральным показателем и её свойства. Преобразования выражений, содержащих степени с натуральным показателем. Одночлен, многочлен. Действия с одночленами и многочленами (сложение, вычитание, умножение). Формулы сокращённого умножения: разность квадратов, квадрат суммы и разности. Разложение многочлена на множители: вынесение общего множителя за скобки, *группировка, применение формул сокращённого умножения. Квадратный трёхчлен, разложение квадратного трёхчлена на множители.*

Дробно-рациональные выражения. Степень с целым показателем. Преобразование дробно-линейных выражений: сложение, умножение, деление. *Алгебраическая дробь. Допустимые значения переменных в дробно-рациональных выражениях. Сокращение алгебраических дробей. Приведение алгебраических дробей к общему знаменателю. Действия с алгебраическими дробями: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень. Преобразование выражений, содержащих знак модуля.*

Квадратные корни. Арифметический квадратный корень. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни: умножение, деление, вынесение множителя из-под знака корня, *внесение множителя под знак корня.*

Уравнения и неравенства

Равенства. Числовое равенство. Свойства числовых равенств. Равенство с переменной.

Уравнения. Понятие уравнения и корня уравнения. *Представление о равносильности уравнений. Область определения уравнения (область допустимых значений переменной).*

Линейное уравнение и его корни. Решение линейных уравнений. *Линейное уравнение с параметром. Количество корней линейного уравнения. Решение линейных уравнений с параметром.*

Квадратное уравнение и его корни. Квадратные уравнения. Неполные квадратные уравнения. Дискриминант квадратного уравнения. Формула корней квадратного уравнения. *Теорема Виета. Теорема, обратная теореме Виета.* Решение квадратных уравнений: использование формулы для нахождения корней, *графический метод решения, разложение на множители, подбор корней с использованием теоремы Виета. Количество корней квадратного уравнения в зависимости от его дискриминанта. Биквадратные уравнения. Уравнения, сводимые к линейным и квадратным. Квадратные уравнения с параметром.*

Дробно-рациональные уравнения. Решение простейших дробно-линейных уравнений. *Решение дробно-рациональных уравнений. Методы решения уравнений: методы равносильных преобразований, метод замены переменной, графический метод. Использование свойств функций при решении уравнений. Простейшие иррациональные уравнения вида* $\sqrt{f(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$. *Уравнения вида* $x^n = a$. *Уравнения в целых числах.*

Системы уравнений. Уравнение с двумя переменными. Линейное уравнение с двумя переменными. *Прямая как графическая интерпретация линейного уравнения с двумя переменными.*

Понятие системы уравнений. Решение системы уравнений. Методы решения систем линейных уравнений с двумя переменными: *графический метод, метод сложения,* метод подстановки. *Системы линейных уравнений с параметром.*

Неравенства. Числовые неравенства. Свойства числовых неравенств. Проверка справедливости неравенств при заданных значениях переменных. Неравенство с переменной. Строгие и нестрогие неравенства. *Область определения неравенства (область допустимых значений переменной).*

Решение линейных неравенств. *Квадратное неравенство и его решения. Решение квадратных неравенств: использование свойств и графика квадратичной функции, метод интервалов. Запись решения квадратного неравенства. Решение целых и дробно-рациональных неравенств методом интервалов.*

Системы неравенств. Системы неравенств с одной переменной. Решение систем неравенств с одной переменной: линейных, *квадратных*. Изображение решения системы неравенств на числовой прямой. Запись решения системы неравенств.

Функции

Понятие функции. Декартовы координаты на плоскости. Формирование представлений о метапредметном понятии «координаты». Способы задания функций: аналитический, графический, табличный. График функции. Примеры функций, получаемых в процессе исследования различных реальных процессов и решения задач. Значение функции в точке. Свойства функций: область определения, множество значений, нули, промежутки знакопостоянства, *чётность/нечётность,* промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения. Исследование функции по её графику. *Представление об асимптотах. Непрерывность функции. Кусочно заданные функции.*

Линейная функция. Свойства и график линейной функции. Угловой коэффициент прямой. Расположение графика линейной функции в зависимости от её углового коэффициента и свободного члена. *Нахождение коэффициентов линейной функции по заданным условиям: прохождение прямой через две точки с заданными координатами, прохождение прямой через данную точку и параллельно данной прямой.*

Квадратичная функция. Свойства и график квадратичной функции (парабола). *Построение графика квадратичной функции по точкам.* Нахождение нулей квадратичной функции, *множества значений, промежутков знакопостоянства, промежутков монотонности.*

Обратная пропорциональность. Свойства функции $y = \dfrac{k}{x}$. Гипербола.

Графики функций. *Преобразование графика функции* $y=f(x)$ *для построения графиков функций вида* $y=af(kx+b)+c$. *Графики функций* $y = a + \dfrac{k}{x+b}$, $y = \sqrt{x}$, $x = \sqrt[3]{x}$, $y=|x|$.

Последовательности и прогрессии. Числовая последовательность. Примеры числовых последовательностей. Бесконечные последовательности. Арифметическая прогрессия и её свойства. Геометрическая прогрессия. *Формула общего члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий. Сходящаяся геометрическая прогрессия.*

Решение текстовых задач

Задачи на все арифметические действия. Решение текстовых задач арифметическим способом. Использование таблиц, схем, чертежей, других средств представления данных при решении задачи.

Задачи на движение, работу и покупки. Анализ возможных ситуаций взаимного расположения объектов при их движении, соотношения объёмов выполняемых работ при совместной работе.

Задачи на части, доли, проценты. Решение задач на нахождение части числа и числа по его части. Решение задач на проценты и доли. Применение пропорций при решении задач.

Логические задачи. Решение логических задач. *Решение логических задач с помощью графов, таблиц.*

Основные методы решения текстовых задач: арифметический, алгебраический, перебор вариантов. *Первичные представления о других методах решения задач (геометрические и графические методы).*

Статистика и теория вероятностей

Статистика. Табличное и графическое представление данных, столбчатые и круговые диаграммы, графики, применение диаграмм и графиков для описания зависимостей реальных величин, извлечение информации из таблиц, диаграмм и графиков. Описательные статистические показатели числовых наборов: среднее арифметическое, *медиана,* наибольшее и наименьшее значения. Меры рассеивания: размах, *дисперсия и стандартное отклонение.* Случайная изменчивость. Изменчивость при измерениях. *Решающие правила. Закономерности в изменчивых величинах.*

Случайные события. Случайные опыты (эксперименты), элементарные случайные события(исходы). Вероятности элементарных событий. События в случайных экспериментах и благоприятствующие элементарные события. Вероятности случайных событий. Опыты с равновозможными элементарными событиями. Классические вероятностные опыты с использованием монет, кубиков. *Представление событий с помощью диаграмм Эйлера. Противоположные события, объединение и пересечение событий. Правило сложения вероятностей. Случайный выбор. Представление эксперимента в виде дерева. Независимые события. Умножение вероятностей независимых событий. Последовательные независимые испытания.* Представление о независимых событиях в жизни.

Элементы комбинаторики. *Правило умножения, перестановки, факториал числа. Сочетания и число сочетаний. Формула числа сочетаний. Треугольник Паскаля. Опыты с большим числом равновозможных элементарных событий. Вычисление вероятностей в опытах с применением комбинаторных формул. Испытания Бернулли. Успех и неудача. Вероятности событий в серии испытаний Бернулли.*

Случайные величины. *Знакомство со случайными величинами на примерах конечных дискретных случайных величин. Распределение вероятностей. Математическое ожидание. Свойства математического ожидания. Понятие о законе больших чисел. Измерение вероятностей. Применение закона больших чисел в социологии, страховании, в здравоохранении, обеспечении безопасности населения в чрезвычайных ситуациях.*

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Тематическое планирование реализует один из возможных подходов к распределению изучаемого материала по учебно-методическому комплекту по алгебре, выпускаемому издательством «Просвещение», не носит обязательного характера и не исключает возможностей иного распределения содержания.

В примерном тематическом планировании разделы основного содержания по алгебре разбиты на темы в хронологии их изучения по соответствующим учебникам.

Особенностью примерного тематического планирования является то, что в нём содержится описание возможных видов деятельности учащихся в процессе усвоения соответствующего содержания, направленных на достижение поставленных целей обучения. Это ориентирует учителя на усиление деятельностного подхода в обучении, на организацию разнообразной учебной деятельности, отвечающей современным психолого-педагогическим воззрениям, на использование современных технологий.

Тематическое планирование представлено в двух вариантах.

Первый вариант составлен из расчёта часов, указанных в проекте Базисного учебного (образовательного) плана (БУП) образовательных учреждений общего образования (не менее 3 часов в неделю, 102 часа в год). При составлении рабочей программы образовательное учреждение может увеличить указанное в проекте БУП минимальное учебное время за счёт его вариативного компонента.

Второй вариант примерного тематического планирования предназначен для классов, нацеленных на повышенный уровень математической подготовки учащихся. В этом случае в основное программное содержание включаются дополнительные вопросы, способствующие развитию математического кругозора, освоению более продвинутого математического аппарата, математических способностей. Расширение содержания математического образования в этом случае даёт возможность существенно обогатить круг решаемых математических задач. При работе по второму варианту примерного тематического планирования на изучение алгебры рекомендуется отводить не менее 4 часов в неделю. Учебные часы, приведённые в примерном тематическом планировании, даны в минимальном объёме (из расчёта 4 часов в неделю, 136 часов в год). Дополнительные вопросы в примерном тематическом планировании даны в квадратных скобках.

Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова «Алгебра, 7», «Алгебра, 8», «Алгебра, 9»

Номер пара-графа	Содержание материала	Количество часов I	Количество часов II	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
	7 класс			
	Глава I. Выражения, тождества, уравнения	**22**	**26**	Находить значения числовых выражений, а также выражений с переменными при указанных значениях переменных. Использовать знаки $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, читать и составлять двойные неравенства. Выполнять простейшие преобразования выражений: приводить подобные слагаемые, раскрывать скобки в сумме или разности выражений. Решать уравнения вида $ax = b$ при различных значениях a и b, а также несложные уравнения, сводящиеся к ним. Использовать аппарат уравнений для решения текстовых задач, интерпретировать результат. Использовать простейшие статистические характеристики (среднее арифметическое, размах, мода, медиана) для анализа ряда данных в несложных ситуациях
1	Выражения	5	5	
2	Преобразование выражений	4	6	
	Контрольная работа № 1	1	1	
3	Уравнения с одной переменной	7	9	
4	Статистические характеристики	4	4	
	Контрольная работа № 2	1	1	

Глава II. Функции		**11**	**18**	Вычислять значения функции, заданной формулой, составлять таблицы значений функции. По графику функции находить значение функции по известному значению аргумента и решать обратную задачу. Строить графики прямой пропорциональности и линейной функции, описывать свойства этих функций. Понимать, как влияет знак коэффициента k на расположение в координатной плоскости графика функции $y = kx$, где $k \neq 0$, как зависит от значений k и b взаимное расположение графиков двух функций вида $y = kx + b$. Интерпретировать графики реальных зависимостей, описываемых формулами вида $y = kx$, где $k \neq 0$ и $y = kx + b$
5 6	Функции и их графики Линейная функция Контрольная работа № 3	5 5 1	7 10 1	
Глава III. Степень с натуральным показателем		**11**	**18**	Вычислять значения выражений вида a^n, где a — произвольное число, n — натуральное число, устно и письменно, а также с помощью калькулятора. Формулировать, записывать в символической форме и обосновывать свойства степени с натуральным показателем. Применять свойства степени для преобразования выражений. Выполнять умножение одночленов и возведение одночленов в степень. Строить графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$. Решать графически уравнения $x^2 = kx + b$, $x^3 = kx + b$, где k и b — некоторые числа
7 8	Степень и её свойства Одночлены Контрольная работа № 4	5 5 1	10 7 1	

Продолжение

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов I	Количество часов II	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
Глава IV. Многочлены		**17**	**23**	Записывать многочлен в стандартном виде, определять степень многочлена. Выполнять сложение и вычитание многочленов, умножение одночлена на многочлен и многочлена на многочлен. Выполнять разложение многочленов на множители, используя вынесение множителя за скобки и способ группировки. Применять действия с многочленами при решении разнообразных задач, в частности при решении текстовых задач с помощью уравнений
9	Сумма и разность многочленов	3	4	
10	Произведение одночлена и многочлена	6	7	
	Контрольная работа № 5	1	1	
11	Произведение многочленов	6	10	
	Контрольная работа № 6	1	1	
Глава V. Формулы сокращённого умножения		**19**	**23**	Доказывать справедливость формул сокращённого умножения, применять их в преобразованиях целых выражений в многочлены, а также для разложения многочленов на множители. Использовать различные преобразования целых выражений при решении уравнений, доказательстве тождеств, в задачах на делимость, в вычислении значений некоторых выражений с помощью калькулятора
12	Квадрат суммы и квадрат разности	5	6	
13	Разность квадратов. Сумма и разность кубов	6	6	
	Контрольная работа № 7	1	1	
14	Преобразование целых выражений	6	9	
	Контрольная работа № 8	1	1	

Глава VI. Системы линейных уравнений		**16**	**17**	Определять, является ли пара чисел решением данного уравнения с двумя переменными. Находить путём перебора целые решения линейного уравнения с двумя переменными. Строить график уравнения $ax + by = c$, где $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Решать графическим способом системы линейных уравнений с двумя переменными. Применять способ подстановки и способ сложения при решении систем линейных уравнений с двумя переменными. Решать текстовые задачи, используя в качестве алгебраической модели систему уравнений. Интерпретировать результат, полученный при решении системы
15	Линейные уравнения с двумя переменными и их системы	5	6	
16	Решение систем линейных уравнений	10	10	
	Контрольная работа № 9	1	1	
Повторение		**6**	**11**	
	Итоговый зачёт	1	1	
	Итоговая контрольная работа	2	2	
8 класс				
Глава I. Рациональные дроби		**23**	**30**	Формулировать основное свойство рациональной дроби и применять его для преобразования дробей. Выполнять сложение, вычитание, умножение и деление рациональных дробей, а также возведение дроби в степень. Выполнять различные преобразования рациональных выражений, доказывать тождества. Знать свойства функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, и уметь строить её график. Использовать компьютер для исследования положения графика в координатной плоскости в зависимости от k
1	Рациональные дроби и их свойства	5	5	
2	Сумма и разность дробей	6	8	
	Контрольная работа № 1	1	1	
3	Произведение и частное дробей	10	15	
	Контрольная работа № 2	1	1	

Продолжение

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов I	Количество часов II	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
Глава II. Квадратные корни		**19**	**25**	Приводить примеры рациональных и иррациональных чисел. Находить значения арифметических квадратных корней, используя при необходимости калькулятор. Доказывать теоремы о корне из произведения и дроби, тождество $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$, применять их в преобразованиях выражений. Освобождаться от иррациональности в знаменателях дробей вида $\frac{a}{\sqrt{b}}$, $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$. Выносить множитель за знак корня и вносить множитель под знак корня. Использовать квадратные корни для выражения переменных из геометрических и физических формул. Строить график функции $y=\sqrt{x}$ и иллюстрировать на графике её свойства
4	Действительные числа	2	3	
5	Арифметический квадратный корень	5	6	
6	Свойства арифметического квадратного корня	3	4	
	Контрольная работа № 3	1	1	
7	Применение свойств арифметического квадратного корня	7	10	
	Контрольная работа № 4	1	1	
Глава III. Квадратные уравнения		**21**	**30**	Решать квадратные уравнения. Находить подбором корни квадратного уравнения, используя теорему Виета. Исследовать квадратные уравнения по дискриминанту и коэффициентам. Решать дробные рациональные уравнения, сводя решение таких уравнений к решению линейных и квадратных уравнений с последующим исключением посторонних корней. Решать текстовые задачи, используя квадратные и дробные уравнения
8	Квадратное уравнение и его корни	10	16	
	Контрольная работа № 5	1	1	
9	Дробные рациональные уравнения	9	12	
	Контрольная работа № 6	1	1	

Глава IV. Неравенства		**20**	**24**	Формулировать и доказывать свойства числовых неравенств. Использовать аппарат неравенств для оценки погрешности и точности приближения. Находить пересечение и объединение множеств, в частности числовых промежутков. Решать линейные неравенства. Решать системы линейных неравенств, в том числе таких, которые записаны в виде двойных неравенств
10	Числовые неравенства и их свойства	8	9	
	Контрольная работа № 7	1	1	
11	Неравенства с одной переменной и их системы	10	13	
	Контрольная работа № 8	1	1	
Глава V. Степень с целым показателем. Элементы статистики		**11**	**13**	Знать определение и свойства степени с целым показателем. Применять свойства степени с целым показателем при выполнении вычислений и преобразовании выражений. Использовать запись чисел в стандартном виде для выражения и сопоставления размеров объектов, длительности процессов в окружающем мире. Приводить примеры репрезентативной и нерепрезентативной выборки. Извлекать информацию из таблиц частот и организовывать информацию в виде таблиц частот, строить интервальный ряд. Использовать наглядное представление статистической информации в виде столбчатых и круговых диаграмм, полигонов, гистограмм
12	Степень с целым показателем и её свойства	6	8	
	Контрольная работа № 9	1	1	
13	Элементы статистики	4	4	
Повторение		**8**	**14**	
Итоговый зачёт		1	1	
Итоговая контрольная работа		2	2	

Продолжение

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов I	Количество часов II	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
	9 класс			
Глава I. Квадратичная функция		**22**	**29**	Вычислять значения функции, заданной формулой, а также двумя и тремя формулами. Описывать свойства функций на основе их графического представления. Интерпретировать графики реальных зависимостей. Показывать схематически положение на координатной плоскости графиков функций $y=ax^2$, $y=ax^2+n$, $y=a(x-m)^2$. Строить график функции $y=ax^2+bx+c$, уметь указывать координаты вершины параболы, её ось симметрии, направление ветвей параболы. Изображать схематически график функции $y=x^n$ с чётным и нечётным n. Понимать смысл записей вида $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ и т. д., где a — некоторое число. Иметь представление о нахождении корней n-й степени с помощью калькулятора
1	Функции и их свойства	5	7	
2	Квадратный трёхчлен	4	5	
	Контрольная работа № 1	1	1	
3	Квадратичная функция и её график	8	11	
4	Степенная функция. Корень n-й степени	3	4	
	Контрольная работа № 2	1	1	
Глава II. Уравнения и неравенства с одной переменной		**14**	**20**	Решать уравнения третьей и четвёртой степени с помощью разложения на множители и введения вспомогательных переменных, в частности решать биквадратные уравнения. Решать дробные рациональные уравнения, сводя их к целым уравнениям с последующей проверкой корней.
5	Уравнения с одной переменной	8	12	
6	Неравенства с одной переменной	5	7	

	Контрольная работа № 3	1	1	Решать неравенства второй степени, используя графические представления. Использовать метод интервалов для решения несложных рациональных неравенств
Глава III. Уравнения и неравенства с двумя переменными		**17**	**24**	Строить графики уравнений с двумя переменными в простейших случаях, когда графиком является прямая, парабола, гипербола, окружность. Использовать их для графического решения систем уравнений с двумя переменными. Решать способом подстановки системы двух уравнений с двумя переменными, в которых одно уравнение первой степени, а другое — второй степени. Решать текстовые задачи, используя в качестве алгебраической модели систему уравнений второй степени с двумя переменными; решать составленную систему, интерпретировать результат
7	Уравнения с двумя переменными и их системы	10	16	
8	Неравенства с двумя переменными и их системы	6	7	
	Контрольная работа № 4	1	1	
Глава IV. Арифметическая и геометрическая прогрессии		**15**	**17**	Применять индексные обозначения для членов последовательностей. Приводить примеры задания последовательностей формулой n-го члена и рекуррентной формулой. Выводить формулы n-го члена арифметической прогрессии и геометрической прогрессии, суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий, решать задачи с использованием этих формул. Доказывать характеристическое свойство арифметической и геометрической прогрессий.
9	Арифметическая прогрессия	7	8	
	Контрольная работа № 5	1	1	
10	Геометрическая прогрессия	6	7	
	Контрольная работа № 6	1	1	

Продолжение

Номер параграфа	Содержание материала	Количество часов I	Количество часов II	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
				Решать задачи на сложные проценты, используя при необходимости калькулятор
Глава V. Элементы комбинаторики и теории вероятностей		**13**	**17**	Выполнить перебор всех возможных вариантов для пересчёта объектов и комбинаций. Применять правило комбинаторного умножения. Распознавать задачи на вычисление числа перестановок, размещений, сочетаний и применять соответствующие формулы. Вычислять частоту случайного события. Оценивать вероятность случайного события с помощью частоты, установленной опытным путём. Находить вероятность случайного события на основе классического определения вероятности. Приводить примеры достоверных и невозможных событий
11	Элементы комбинаторики	9	11	
12	Начальные сведения из теории вероятностей	3	5	
	Контрольная работа № 7	1	1	
Повторение		**21**	**29**	
Итоговая контрольная работа		2	2	